

Ma.
0
150 m
4

Kleyers Encyklopädie.



Lehrbuch

der

ebenen

Elementar - Geometrie

V. Teil

von

Prof. Dr. J. Sachs

Ma.
0.
150 m
4

Kleyers

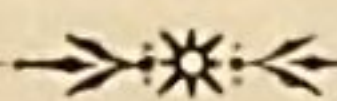


Encyklopädie



der gesamten

mathematischen, technischen und exakten
Natur-Wissenschaften.



Abteilung:

Raumgrössenlehre I.





Lehrbuch
der
ebenen Elementar-Geometrie
(Planimetrie).

Fünfter Teil:

Die Flächen der geradlinigen Figuren.

Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den
Ergebnissen der ungelösten Aufgaben.

Mit 346 Erklärungen und 96 in den Text gedruckten Figuren.

Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten

bearbeitet

nach System Kleyer

von

Prof. Dr. J. Sachs.



Bremerhaven.

Verlag von L. v. Vangerow.

Lehrbuch

ebenen Elementar-Geometrie

(Planimetrie)

Fünfter Teil:

Die Flächen der geradlinigen Figuren.

Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den

Ergebnissen der Aufgaben.

Mit 300 Abbildungen in 100 Figuren.



Für das Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten.

Verlag:

nach System Klopfer

Prof. Dr. J. Sachs.

Stuttgart.

Druck der Stuttgarter Vereins-Buchdruckerei.

Vorwort.

Die Behandlung der Flächen der Figuren und die damit im Zusammenhang stehende Bestimmung von Strecken durch Rechnung bildet ein Gebiet, auf welchem Geometrie und Algebra in innige Berührung treten. Die Geometrie bedarf der algebraischen Operationen zum Ausdruck der Wertbeziehungen unter ihren Grössen. Die Algebra erhält durch die geometrische Deutung ihrer stummen Formeln eine beredte Veranschaulichung derselben, die z. B. bei den häufigen Fällen des doppelten Wurzelzeichens von besonderem Werte ist (vergl. Erkl. 262).

Eine Folge dieser Berührung mit der Algebra ist die Anwendung einiger algebraischen Disciplinen im Bereiche des vorliegenden V. Teiles, nämlich der Rechnung mit Quadratwurzeln, in beschränkterem Masse auch der Proportionen und quadratischen Gleichungen. Und zwar dürfte es wohl als ein Vorzug dieses Teiles gelten, dass mit diesen Mitteln für eine Reihe von Dreiecken die grösste Zahl ihrer Streckenelemente in Formeln und Zahlenwerten vorgeführt ist (vergl. z. B. die Zusammenstellung in der Auflösung der Aufgabe 202).

Ueber Proportionen und quadratische Gleichungen ist jeweils in den Erklärungen der nötige Aufschluss gegeben; doch ist auch ohne Kenntniss dieser Fächer ein in sich abgeschlossenes Studium des vorliegenden Teiles vollständig ermöglicht.

Eine zweite Folge der algebraischen Behandlung war eine nicht unerhebliche Erschwerung der äusseren Ausstattung des Buches. Dass diese doch eine so wohlgelungene geworden, bildet ein besonderes Verdienst der Verlagsbuchhandlung.

Baden-Baden, im November 1892.

Prof. Dr. J. Sachs.

YOWOKE

The Yowoke people are a small tribe living in the mountains of the State of Oregon. They are a very primitive people and their customs are very different from those of the white people. They are very fond of their horses and have a great many of them. They also have a great many dogs and cats. They are very brave and are not afraid of the white people. They are very kind and friendly to all who come to visit them. They are very good hunters and are able to kill all kinds of animals. They are also very good farmers and grow a great many different kinds of crops. They are very intelligent and are able to do all kinds of work. They are very brave and are not afraid of the white people. They are very kind and friendly to all who come to visit them. They are very good hunters and are able to kill all kinds of animals. They are also very good farmers and grow a great many different kinds of crops. They are very intelligent and are able to do all kinds of work.

Yowoke, Oregon, 1904

John A. Smith

Inhaltsverzeichnis.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

Fünfter Teil.

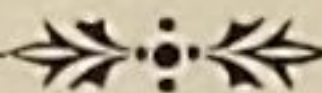
Die Flächen der geradlinigen Figuren.

	Seite
1) Ueber das Messen von Flächen	1
2) Ueber die Flächen der einfachen Figuren	7
a) Ueber das Rechteck und Parallelogramm, ...	7
b) Ueber das Dreieck und die übrigen Vielecke	12
3) Ueber besondere Fälle von Flächenbeziehungen	21
4) Ueber den pythagoreischen Lehrsatz und seine Folgerungen	28
5) Ueber die Anwendung der Flächensätze auf die Bestimmung von Streckengrößen	38
6) Ueber Figuren mit gegebenen Winkelbeziehungen	53
7) Ueber die Verwandlung der Figuren	66
8) Ueber die Teilung der Figuren	75
9) Ueber das graphische Rechnen	77

Aufgaben-Sammlung.

1) Ueber das Messen und die Masseinheiten	84
a) Gelöste Aufgaben	84
b) Ungelöste Aufgaben	87
2 a) Aufgaben über das Rechteck und Parallelogramm	88
a) Gelöste Aufgaben	88
b) Ungelöste Aufgaben	91
2 b) Aufgaben über das Dreieck und die übrigen Vielecke	93
a) Gelöste Aufgaben	93
b) Ungelöste Aufgaben	102
3) Aufgaben über besondere Flächenbeziehungen	104
a) Gelöste Aufgaben	104
b) Ungelöste Aufgaben	108
4) Aufgaben über den pythagoreischen Lehrsatz	110
a) Gelöste Aufgaben	110
b) Ungelöste Aufgaben	113
5) Aufgaben zur Berechnung von Dreieckselementen	114
a) Gelöste Aufgaben	114
b) Ungelöste Aufgaben	128
6) Aufgaben über Flächen mit gegebenen Winkelbeziehungen	129
a) Gelöste Aufgaben	129
b) Ungelöste Aufgaben	137

	Seite
7) Verwandlungsaufgaben	139
a) Gelöste Aufgaben	139
b) Ungelöste Aufgaben	145
8) Aufgaben über Figurenteilung	147
a) Gelöste Aufgaben	147
b) Ungelöste Aufgaben	153
9) Aufgaben über das graphische Rechnen	155
a) Gelöste Aufgaben	155
b) Ungelöste Aufgaben	161
Ergebnisse der ungelösten Aufgaben	162
Berichtigungen	164



Ebene Elementar-Geometrie

(Planimetrie).

5. Teil.

Die Flächen der geradlinigen Figuren.

1) Ueber das Messen von Flächen.

Frage 1. Was versteht man unter der Fläche einer Figur?

Antwort. Unter der Fläche einer Figur versteht man denjenigen Teil der Zeichnungsebene, welcher von der Figur umschlossen, oder aus der ganzen übrigen Ebene ausgeschnitten und durch die Figur abgegrenzt wird.

Frage 2. Was versteht man unter geradlinigen Figuren?

Erkl. 1. Mit anderer Ausdrucksweise könnte man als geradlinige Figuren diejenigen bezeichnen, deren Umfang durch gebrochene Linien, nicht aber durch gemischte Linien gebildet wird (vergl. Antwort der Frage 53 des I. Teiles). Die Flächen der Figuren letzterer Art gelangen erst im VIII. Teile dieses Lehrbuches zur Besprechung.

Antwort. Unter geradlinigen Figuren versteht man solche Figuren, deren Umfang nur aus Stücken gerader Linien gebildet wird, z. B. Dreiecke, Vierecke u. s. w., im Gegensatz zu solchen Figuren, deren Umfang ganz oder teilweise von Kreisen oder Kreisbogen oder sonstigen krummen Linien gebildet wird.

Frage 3. Welcher wichtige Unterschied besteht zwischen dem Begriffe der Fläche einer Figur und dem der Grösse einer Strecke oder eines Winkels?

Erkl. 2. Das Fortschreiten auf einer Linie nach vorwärts oder rückwärts und ebenso das Drehen eines Winkelschenkels entgegen oder mit Uhrzeigerdrehung sind der positive und negative Vorgang derselben Abän-

Antwort. Während Strecken und Winkel hinsichtlich der Aneinanderlagerung ihrer kleinsten Teilchen oder Elemente eindimensionale Grössen oder Teile einer einfach unendlichen Mannigfaltigkeit sind, so ist die Fläche einer Figur eine zweidimensionale Grösse oder ein Teil

derungsweise der Strecken- oder Winkelgrösse. Anderes Fortschreiten als vor- und rückwärts auf der Strecke gibt es nicht, ebensowenig wie andere Winkeldrehung als entgegen und mit Uhrzeigerdrehung; daher können diese beiden Grössengattungen nur in je einer einzigen Richtung ausgedehnt sein, sie besitzen nur eine einzige Dimension oder sind eindimensional; eine Fläche dagegen kann nach allen in der Ebene liegenden Richtungen ausgedehnt werden.

Erkl. 3. Die einfach unendliche Mannigfaltigkeit, deren Teil eine Strecke ist, ist die unendlich lange gerade Linie, auf welcher die Strecke liegt, in ihrer gesamten eindimensionalen Ausdehnung. Dieselbe enthält unendlich viele Längeneinheiten, deren Anzahl im einzelnen ebenso anwächst, wie die Zahlen der gemeinen Zahlenreihe ins unendliche wächst.

Die einfach unendliche Mannigfaltigkeit, deren Teil ein Winkel ist, ist die ebenso wie zuvor einfach unendliche Anzahl von Vollwinkeln, welche durch fortgesetzte Drehung um einen Winkelscheitel beschrieben werden können.

Die zweifach unendliche Mannigfaltigkeit dagegen, deren Teil eine Fläche ist, ist die nach allen Seiten ausgedehnte Gesamtebene, in welcher die betrachtete Figur gezeichnet enthalten ist.

einer zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit. Denn wenn eine Fortschreitungsrichtung auf einer Linie oder eine Drehungsrichtung um einen Punkt festgesetzt ist, so gibt es nur eine einzige Richtung, in welcher eine gegebene Strecke oder ein gegebener Winkel durch Anlagerung weiterer Streckenelemente oder Winkелеlemente vergrössert werden kann. An ein gegebenes Flächenstück dagegen können sich an beliebigen Stellen und in beliebigen Richtungen weitere Flächenelemente anlagern.

Während also alle Strecken und alle Winkel in Beziehung der Arten und Weisen der Aneinanderlagerung ihrer Bildungselemente, also in Beziehung ihrer sogen. Formen (vergl. Antwort 24 und 25 im I. Teile) unter sich vollkommen übereinstimmen, d. h. ähnlich sind, so trifft dies bei Flächen nicht mehr zu, d. h. zwei beliebige Flächen sind im allgemeinen nicht ähnlich.

Frage 4. Welche Folgerungen ergeben sich aus der vorigen Antwort in Bezug auf das Vergleichen mehrerer Flächen?

Erkl. 4. Wenn für zwei Strecken oder Winkel die Gleichheit nachgewiesen ist, so sind sie ohne weiteres auch kongruent — weil sie ihrer Natur nach ausserdem ähnlich sind. Strecken und Winkel können nur ihrer Grösse nach, nicht ihren Formen nach verschieden sein. — Flächen aber können gleich sein, ohne ähnlich zu sein, — wenn nämlich dieselbe Anzahl von Flächenelementen in verschiedenen Formen aneinandergelagert sind. Flächen können also sowohl ihrer Form als auch ihrer Grösse nach verschieden sein. Kongruente Flächen aber sind jedenfalls gleichgross.

Erkl. 5. Bei Strecken und Winkeln kann mittels des Aufeinanderlegens die Untersuchung ihrer Grösse geführt werden, weil infolge ihrer Aehnlichkeit zwei Strecken mit ihren Anfangspunkten, bzw. zwei Winkel mit ihren Anfangschenkeln und bzw. mit gleicher Richtung aufeinandergelegt werden können. Flächen aber, welche nicht ähnlich sind, haben keine solchen einander entsprechenden „Anfangselemente“.

Antwort. Für das Vergleichen von Flächen erhält man aus den vorigen Ueberlegungen folgende Schlüsse:

1) Zwei Flächen stimmen im allgemeinen nicht überein in Beziehung ihrer Formen und nicht in Beziehung der Mengen ihrer absoluten Einheiten.

2) Zur Kongruenz zweier Flächen, d. h. zur Möglichkeit, zwei Flächen vollständig zur Deckung zu bringen, bedarf es des doppelten Nachweises der Uebereinstimmung ihrer Formen und ihrer absoluten Werte. Oder in andern Worten: zwei Flächen sind nur dann kongruent, wenn sie sowohl ähnlich als auch gleich sind.

3) Zur Vergleichung zweier Flächen in Bezug auf ihre Grösse ist das Verfahren des Aufeinanderlegens im allgemeinen nicht anwendbar, da die etwa vorhandene Gleichheit ihrer Grössen nicht auch mit Gleichheit der Formen verbunden ist.

Frage 5. Was versteht man unter dem Messen einer Fläche?

Erkl. 6. Auf Grund der Ergebnisse der vorhergehenden Ueberlegungen wird es sowohl für die Wahl der Flächeneinheit selbst, als auch — da das Verfahren des Aufeinanderlegens im allgemeinen nicht anwendbar ist — für die Art und Weise der Bestimmung der Masszahl besonderer Untersuchungen bedürfen.

Antwort. Unter dem Messen einer Fläche versteht man die Bestimmung derjenigen Zahl z , „Masszahl“ genannt, welche angibt, wie vielmals ein im allgemeinen beliebig gewähltes Flächenstück, die sogen. Masseinheit, in jener Fläche enthalten ist.

Frage 6. Was versteht man unter der Grösse einer Fläche?

Erkl. 7. Die Grösse der Fläche einer Figur wird auch der „Flächeninhalt“ oder kurz der „Inhalt der Figur“ genannt.

Die Masseinheit, in welcher die Grösse oder der Inhalt einer Fläche ausgedrückt ist, wird dementsprechend auch Flächenmasseinheit oder Flächeneinheit, Dimensionseinheit genannt. Die Flächengrösse als Bezeichnung jener Dimension wird auch zum Unterschied von andern Dimensionen „Flächendimension“ genannt.

Antwort. Unter der Grösse einer Fläche versteht man die Angabe derjenigen Anzahl von Masseinheiten, welche sich beim Messen der Fläche ergeben.

Die Angabe der Flächengrösse einer Figur wird auch die Quadratur dieser Figur genannt, weil nämlich als Masseinheit gewöhnlich irgend ein Quadrat gewählt wird.

Frage 7. Welche Fläche wird zum Messen von Flächen als Masseinheit (Flächenmasseinheit oder Flächeneinheit) angenommen, und welchen besondern Namen führt diese Fläche?

Erkl. 8. Zum Messen einer Fläche kann man jede beliebige Fläche als Flächenmasseinheit oder als Mass wählen (siehe Antwort der Frage 6). Stets aber wird als Flächeneinheit die Fläche desjenigen Quadrates gewählt, dessen Seiten die Länge von je einer Längeneinheit besitzen. Bei der früher vorhandenen Verschiedenheit der Längeneinheiten an verschiedenen Orten gab es daher auch ebensoviele verschiedene Flächenmasseinheiten. Mit der Einführung des Meters als allgemeiner Längeneinheit aber gelangte auch das Quadratmeter als Flächenmasseinheit zu allgemeiner Geltung.

Antwort. Beim Messen von Flächen wird als Masseinheit (Flächenmasseinheit oder Flächeneinheit) die Fläche eines Quadrates angenommen, dessen Seiten die Länge von je einem Meter besitzen; diese Fläche führt als Flächenmasseinheit den besondern Namen „Quadratmeter“. (Man sagt sowohl „der Quadratmeter“ als auch „das Quadratmeter“, wie auch bald „der Meter“, bald „das Meter“ gesprochen wird.)

Erkl. 9. Wie zur Messung kleinerer Längen als ein Meter aliquote Teile des Meters als Längenmass dienen, so bedient man sich auch zur Messung solcher Flächen, welche kleiner als ein Quadratmeter sind, bestimmter Teile eines Quadratmeters, nämlich der Quadrate über den Längen von einem Dezimeter, Centimeter, Millimeter u. s. w., und benennt dieselben als Quadratdezimeter

bezeichnet als qm

Quadratdezimeter	bezeichnet als qdm
Quadratcentimeter	„ „ qcm
Quadratmillimeter	„ „ mm
u. s. w.	

Erkl. 10. Wie zur Messung grösserer Längen als ein Meter Vielfache des Meters als Längeneinheiten dienen, so bedient man sich auch zur Messung solcher Flächen, welche bedeutend grösser als ein Quadratmeter sind, der Vielfachen eines Quadratmeters, nämlich der Quadrate über den Längen von einem Dekameter u. s. w., und bezeichnet dieselben ähnlich, also z. B. Quadratkilometer . . . qKm.
 Unter diesen dient insbesondere als Flächeneinheit das Quadrat über einem Dekameter . . . qDm
 und wird bezeichnet durch den Namen Ar . . . a
 Und die Fläche von 100 Ar nennt man Hektar ha.

Bei geographischen Flächenangaben bedient man sich ausserdem auch oft des Quadrates über der Länge einer „geographischen Meile“ als Flächeneinheit und nennt diese Einheit eine „Quadratmeile“.

Frage 8. Wie verfährt man, um zu ermitteln, wie oft die Flächeneinheit im Flächeninhalt einer gegebenen Figur enthalten ist?

Erkl. 11. Solche Fälle, in welchen zwei Flächen durch unmittelbares Aufeinanderlegen verglichen, bzw. gleichgemacht werden, sind z. B. das Durchpausen einer Figur oder Zeichnung, das sogen. „Abschneiden von Schnittmustern“ zu Kleidern oder Wäsche.

Erkl. 12. Streng genommen müsste man sagen, dass eine unmittelbare Messung von Flächen so gut wie gar nie stattfindet, sondern dass Flächeninhalte stets nur berechnet werden aus gewissen Längengrössen einer Figur, wie Seiten, Diagonalen, Höhen, oder Winkelgrössen. Berechnung von Flächen unter Benützung gegebener Winkel derselben findet besonders oft in der Trigonometrie statt (siehe Kleyers Lehrbuch der Trigonometrie).

Frage 9. Wie kann durch Zeichnung der Flächeninhalt einer Figur bestimmt werden?

Erkl. 13. Die Bestimmung der Fläche eines Rechtecks geschieht durch die Zerteilung in lauter Flächenstücke, die mit der Flächeneinheit kongruent sind. Die Bestimmung der Fläche eines Dreiecks durch denselben Vorgang oder durch Zufügung einer Figur, welche mit dem Dreieck zusammen eine Figur von bekanntem Inhalt ergibt.

Erkl. 14. Mehrmalige Addition derselben Grösse ist Multiplikation, fortgesetzte Subtraktion derselben Grösse ist Divi-

Antwort. Zur Messung des Flächeninhaltes einer gegebenen Figur kann nur in seltenen Ausnahmefällen so verfahren werden, dass man das gewählte Mass wiederholt auf die zu untersuchende Fläche auflegt und so unmittelbar erkennt, wie oft dieses Auflegen nötig ist, um die Figur vollständig zu bedecken.

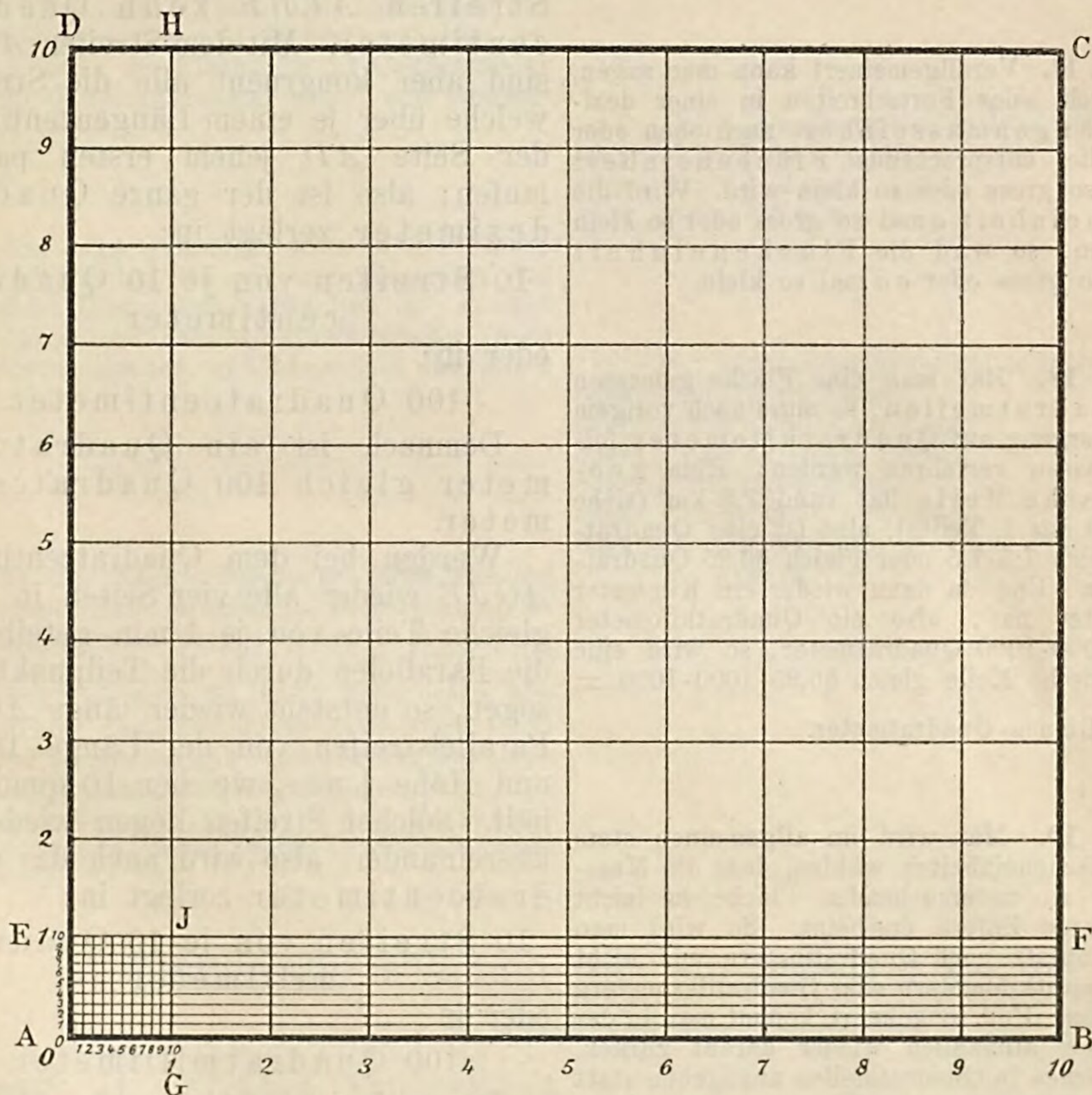
In den meisten Fällen wird vielmehr die Messung der Flächen darauf zurückgeführt, dass man bestimmte Längen einer Figur misst und daraus durch Rechnungsoperationen die Fläche derselben findet, d. h. durch Rechnung oder auch durch Zeichnung ermittelt, wie oft die Flächeneinheit auf die gegebene Figur würde aufgelegt werden können.

Antwort. Man kann den Flächeninhalt einer Figur durch Zeichnung, bzw. durch Konstruktion ermitteln, indem man durch wiederholtes Abteilen oder Abschneiden oder Zufügen von Figuren die zu untersuchende Fläche als Summe oder Differenz solcher Flächen darstellt, welche mit der gewählten Flächeneinheit oder mit bekannten Vielfachen oder Teilen derselben kongruent sind. Denn da kongruente Figuren gleichen Flächen-

sion. So wird die Zahl 5 dreimal addiert, indem man $3 \cdot 5 = 15$ addiert. Die Frage, wie oft man 5 von 15 abziehen könne, führt zur Divisionsaufgabe $15 : 5$.

inhalt besitzen, so ist darnach der Flächeninhalt der zu untersuchenden Figur bestimmt durch ein- oder mehrmalige Addition oder Subtraktion der Masszahlen der einzelnen Figurenteile.

Figur 1.



Frage 10. Wie ermittelt man auf Grund der Antwort der vorigen Frage die Beziehungen zwischen den Unter- und Oberabteilungen der Flächenmasseinheit?

Erkl. 15. Die im Nebestehenden für das Quadratdezimeter durchgeführte Untersuchung gilt genau gleichlautend für das Quadratmeter. Dann müsste Figur 1 als verkleinerte Zeichnung eines Quadratmeters angesehen werden. Dabei bedeutet also AB einen Meter, AG einen Dezimeter, und ein Zehntel von AG oder AE ein Centimeter. Man findet, dass ein Quadratmeter gleich 100 Quadratdezimeter.

Antwort. Um die Beziehungen zwischen den Unter- und Oberabteilungen der Flächenmasseinheit festzustellen, untersuche man z. B. das in Figur 1 in natürlicher Grösse dargestellte Quadratdezimeter. Es ist also:

$$AB = BC = CD = DA = 1 \text{ Dezimeter.}$$

Wird nun jede der vier Seiten in 10 gleiche Teile geteilt, so ist jeder dieser Teile ein Centimeter. Zieht man dann die Verbindungslinien je zweier gegenüberliegenden Teilpunkte, so entsteht an

Erkl. 16. Würde ein Flächenmass gebraucht, dessen Seite in eine andere Anzahl als 10 Längenteile geteilt würde, so entsteht auch eine andere Zahl als 100. So hat ein Fuss (bezeichnet durch ') 12 Zoll. Daher würde ein Quadratfuss durch die analoge Operation zerlegt in 12 Streifen von je 12 Quadratzoll, also ein Quadratfuss gleich $12 \cdot 12$ oder 144 Quadratzoll.

Erkl. 17. Verallgemeinert kann man sagen, dass durch jedes Fortschreiten in einer dezimalen Längenmasseinheit nach oben oder unten die entsprechende Flächeneinheit 100mal so gross oder so klein wird. Wird die Längeneinheit a mal so gross oder so klein genommen, so wird die Flächeneinheit a mal so gross oder a mal so klein.

Erkl. 18. Hat man eine Fläche gemessen nach Quadratmeilen, so muss nach vorigem zum Uebergang auf Quadratkilometer folgendermassen verfahren werden: Eine geographische Meile hat rund 7,5 km (siehe Erkl. 106 des I. Teiles), also ist eine Quadratmeile gleich $7,5 \cdot 7,5$ oder gleich 56,25 Quadratkilometer. Und da dann wieder ein Kilometer 1000 Meter hat, also ein Quadratkilometer gleich $1000 \cdot 1000$ Quadratmeter, so wird eine geographische Meile gleich $56,25 \cdot 1000 \cdot 1000 = 56 \frac{1}{4}$ Millionen Quadratmeter.

Erkl. 19. Man wird im allgemeinen stets solche Flächeneinheiten wählen, dass die Masszahl der zu untersuchenden Fläche in leicht übersehbaren Ziffern erscheint. So wird man einen Bauplatz nach Quadratmetern und nicht nach Quadratkilometern oder Quadratdezimetern ausdrücken. Und umgekehrt kommt man in der Geographie allmählich wieder darauf zurück, Länderflächen in Quadratmeilen anzugeben statt in Quadratkilometern, welche so viel grössere Ziffern veranlassen.

Erkl. 20. Nachstehende Uebersicht enthält eine Zusammenstellung des metrischen Flächenmasssystems:

1 qKm =	100 qHm (ha) =	10000 qDm (Ar) =	1000000 qm =	100000000 qdm =
			= 10000000000 qem =	100000000000 qmm
0,01 qKm =	1 qHm (ha) =	100 qDm (Ar) =	10000 qm =	1000000 qdm =
			= 100000000 qem =	10000000000 qmm
0,0001 qKm =	0,01 qHm (ha) =	1 qDm (Ar) =	100 qm =	10000 qdm =
			= 1000000 qem =	100000000 qmm
0,000001 qKm =	0,0001 qHm (ha) =	0,01 qDm (Ar) =	1 qm =	100 qdm =
			= 10000 qem =	1000000 qmm
0,00000001 qKm =	0,000001 qHm (ha) =	0,0001 qDm (Ar) =	0,01 qm =	1 qdm =
			= 100 qem =	10000 qmm
0,0000000001 qKm =	0,00000001 qHm (ha) =	0,000001 qDm (Ar) =	0,0001 qm =	0,01 qdm =
			= 1 qem =	100 qmm
0,000000000001 qKm =	0,0000000001 qHm (ha) =	0,00000001 qDm (Ar) =	0,000001 qm =	0,0001 qdm =
			= 0,01 qem =	1 qmm

der Ecke A das Quadrat $AGJE$, von dem jede Seite $AG = GJ = JE = EA = 1$ cm ist. Dieses Quadrat $AGJE$ ist also ein Quadratcentimeter. Solcher Quadrate ist aber zwischen A und B über jedem Centimeter der Strecke AB eines vorhanden, also hat der Streifen $AEBF$ zehn Quadratcentimeter. Mit dem Streifen $ABFE$ sind aber kongruent alle die Streifen, welche über je einem Längencentimeter der Seite AD jenem ersten parallel laufen; also ist der ganze Quadratdezimeter zerlegt in:

10 Streifen von je 10 Quadratcentimeter

oder in:

100 Quadratcentimeter.

Demnach ist ein Quadratdezimeter gleich 100 Quadratcentimeter.

Werden bei dem Quadratcentimeter $AGJE$ wieder alle vier Seiten in je 10 gleiche Teile von je 1 mm geteilt und die Parallelen durch die Teilpunkte gezogen, so entsteht wieder längs AG ein Parallelstreifen von der Länge 10 mm und Höhe 1 mm, welcher 10 qmm enthält. Solcher Streifen liegen wieder 10 übereinander, also wird auch das Quadratcentimeter zerlegt in:

10 Streifen von je 10 Quadratmillimeter

oder in:

100 Quadratmillimeter.

Demnach ist ein Quadratcentimeter gleich 100 Quadratmillimeter.

Und ebenso lautet die Beziehung zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Unter- bzw. Oberabteilungen der Flächenmasse.

Erkl. 21. Der durch Messen gefundene Inhalt einer Fläche wird wie folgt bezeichnet:

a) Hat man gefunden, dass eine Fläche F genau 36 Quadratmeter gross ist, so sagt man, die Fläche misst, oder die Fläche hat, oder die Fläche enthält, oder es ist eine Fläche von 36 Quadratmetern, und bezeichnet dies durch

$$F = 36 \text{ Quadratmeter}$$

$$\text{oder: } F = 36 \text{ qm}$$

b) Hat man gefunden, dass in der Fläche das Quadratmeter 17 mal und ausserdem das Quadratdezimeter genau 29 mal enthalten ist, so sagt man, die Fläche ist 17 Quadratmeter (und) 29 Quadratdezimeter gross, und bezeichnet dies durch

$$F = 17 \text{ Quadratmeter } 29 \text{ Quadratdezimeter}$$

$$\text{oder: } F = 17 \text{ qm } 29 \text{ qdm}$$

$$\text{oder: } F = 17,29 \text{ qm}$$

$$\text{oder: } F = 1729 \text{ qdm}$$

c) Hat man gefunden, dass in der Fläche das Quadratmeter 315 mal und ausserdem das Quadratcentimeter 7 mal enthalten ist, so sagt man, die Fläche hat 315 Quadratmeter (und) 7 Quadratcentimeter, und bezeichnet dies durch

$$F = 315 \text{ Quadratmeter } 7 \text{ Quadratcentimeter}$$

$$\text{oder: } F = 315 \text{ qm } 7 \text{ qcm}$$

$$\text{oder: } F = 3 \text{ qDm } 15 \text{ qm } 7 \text{ qcm}$$

$$\text{oder: } F = 3 \text{ Ar } 15 \text{ qm } 7 \text{ qcm}$$

$$\text{oder: } F = 315,0007 \text{ qm}$$

$$\text{oder: } F = 31500,07 \text{ qdm}$$

$$\text{oder: } F = 3150007 \text{ qcm}$$

u. s. w.

Erkl. 22. Ebenso wie andere einer Messung zu unterwerfende Grössen, z. B. Strecken oder Winkel, heissen auch Flächen kommensurabel oder inkommensurabel (s. Erkl. 100 im I. Teil und Erkl. 28 im II. Teil), wenn sich beim Messen derselben durch eine und dieselbe Flächenmasseinheit ergibt, dass sich die Masszahlen beider Flächen bei beliebiger Verkleinerung der Masseinheit einmal in ganzen Zahlen ausdrücken lassen oder nicht.

2) Ueber die Flächen der einfachen Figuren.

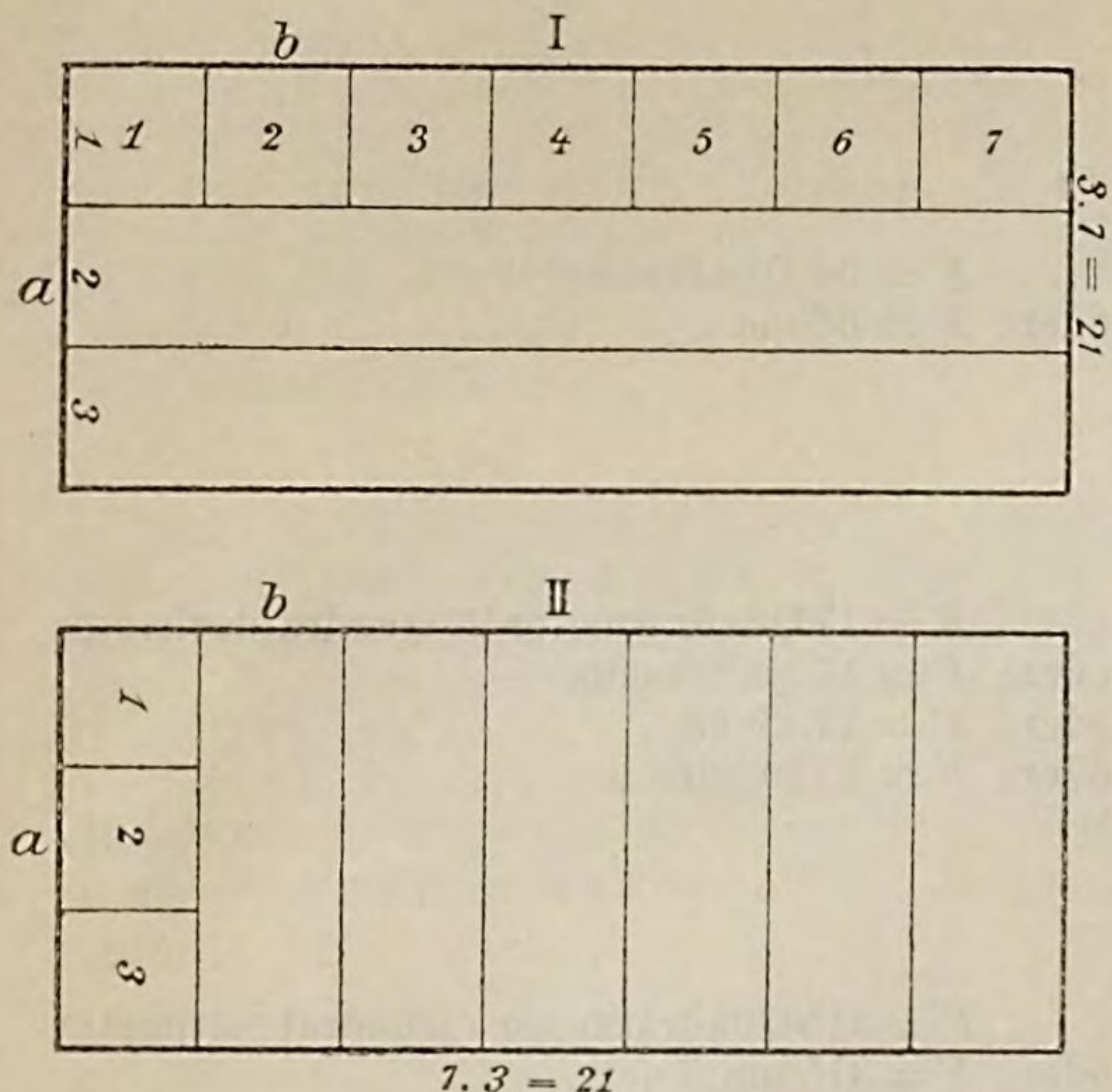
a) Ueber das Rechteck und Parallelogramm.

Frage 11. Welchen Flächeninhalt hat ein Rechteck von gegebenen Seiten a und b ?

Erkl. 23. Ebenso, wie in nebenstehender Beweisführung das Rechteck in a Längsstreifen von der Länge b zerlegt wird, könnte man dasselbe (siehe Figur 2, II) auch durch parallele Linien zur Seite a zerlegen in b Längsstreifen von der Länge a . Statt a Längsstreifen von je b Flächeneinheiten erhält man dann b Längsstreifen von je a Flächeneinheiten, zusammen wieder $a \cdot b = b \cdot a$ Flächeneinheiten.

Antwort. Um zu ermitteln, wie oft man auf die Fläche eines gegebenen Rechtecks die als Masseinheit benutzte Fläche auflegen kann, messe man zunächst zwei anstossende Seiten desselben und ziehe durch die beim Auflegen des Längenmasses entstehenden Teilpunkte der einen von beiden, etwa der Seite a , jeweils eine Parallele zur andern Seite. Dadurch wird das ganze Rechteck in so viele kongruente Längsstreifen geteilt, als die Seite a Längeneinheiten hat. Jeder ist ein Rechteck, dessen Länge $= b$ und dessen Höhe gleich der Längenmasseinheit ist. Zerteilt man jetzt von diesen

Figur 2.



Erkl. 24. Setzt man, wie in Figur 2 geschehen, $a = 3$, $b = 7$, so erhält man nach der ersten Art (I) 3 Längsstreifen von je 7 Einheitsquadraten, nach der zweiten Art (II) 7 Querstreifen von je 3 Einheitsquadraten, also jedesmal:

$$3 \cdot 7 = 7 \cdot 3 = 21 \text{ Flächeneinheiten.}$$

Erkl. 25. Bei den die Flächen behandelnden Untersuchungen kommt es häufig vor, dass derselbe Buchstabe (a oder b im nebenstehenden) bald als Benennung der ganzen Linie, bald nur als Benennung der auf dieser Linie liegenden Seitenstrecke, bald als Masszahl dieser Strecke gebraucht wird. Man hat alsdann aus dem Zusammenhange des Satzes zu entnehmen, welche dieser drei Anwendungen für den gerade vorliegenden Fall die einzig richtige sein kann. In der letztgenannten Auffassung ist auch Satz 1a zu verstehen.

Erkl. 26. Die Masszahlen zweier Seiten sind unbenannte Zahlen; diese können multipliziert werden, und ihrem Produkte dann als Benennung die Flächenmasseinheit zugeschrieben werden. Die Länge einer Seitenstrecke selbst wäre eine benannte Zahl, und als benannte Zahlen können Seiten selbst nicht multipliziert werden. Hierin liegt die Ungenauigkeit in der Fassung des Satzes 1a. Also nicht die Seiten selbst, sondern nur ihre Masszahlen sind zu multiplizieren, um dann — in Flächeneinheiten — den Inhalt des Rechtecks zu erhalten.

Erkl. 27. Da beim Rechteck jede Seite als Grundseite und die anstossende als Höhe gewählt werden kann, so sagt man wohl auch in etwas veränderter Ausdrucksweise:

Satz. Der Inhalt des Rechtecks ist Grundseite mal Höhe.

Parallelstreifen den der Seite b anliegenden wieder durch Parallele zur Seite a durch die Teilpunkte der Seite b , so erkennt man, dass dieser erste Längsstreifen ebensovielmal die Flächenmasseinheit enthält, als die Seite b Längenmasseinheiten, denn jede Teilfläche des Längsstreifens wird ein Quadrat, dessen Seite gleich der Längeneinheit ist.

Das ganze Rechteck enthält also im ganzen a Längsstreifen von je b Flächeneinheiten, oder $a \cdot b$ Flächeneinheiten.

Es entsteht also der

Satz 1. Man erhält die Anzahl der Flächeneinheiten eines Rechtecks, indem man die Anzahlen der Längeneinheiten der beiden Seiten miteinander multipliziert.

Oder etwas ungenauer, aber kürzer:

Satz 1a. Der Inhalt des Rechtecks ist gleich dem Produkt zweier anstossenden Seiten.

Ebenso ist auch der Inhalt des Quadrats gleich dem Produkt zweier anstossenden Seiten oder gleich Seite mal Seite oder gleich der zweiten Potenz einer Seite.

Frage 12. Wie verfährt man zur Inhaltsbestimmung eines Rechtecks, dessen Seiten a und b bei der Längenmessung keine ganzen Zahlen ergeben?

Erkl. 28. Man hat darauf zu achten, dass beide Rechtecksseiten in Längeneinheiten derselben Benennung in die Rechnung genommen werden. Ist also etwa die eine Seite a zu 5 dm, die andere b zu 24 cm angesetzt, so ist für die Flächenberechnung

entweder: $a = 5 \text{ dm}, b = 2,4 \text{ dm}$
oder: $a = 50 \text{ cm}, b = 24 \text{ cm}$

anzusetzen. Die Fläche wird dann gleich $a \cdot b$, nämlich:

entweder $= 5 \cdot 2,4 \text{ qdm} = 12 \text{ qdm} = 1200 \text{ qcm}$
oder $= 50 \cdot 24 \text{ qcm} = 1200 \text{ qcm} = 12 \text{ qdm}$.

Erkl. 29. Man hüte sich vor dem Irrtum, als ob die Richtigkeit des Satzes 1 für die in nebenstehender Antwort betrachteten Fälle nur mit Annäherung genau sei, oder mit einem Fehler belastet bleibe. Nicht der Satz bleibt ungenau, sondern nur die praktisch angebbare Ziffer der Inhaltsgrösse. Und zwar letztere nicht etwa infolge Ungenauigkeit des Satzes, sondern nur infolge der Unmöglichkeit vollkommen genauer Längenmessung der mit dem Metermass inkommensurablen Seitenstrecken. Für den theoretischen Gedankengang des Beweises wird der Fehler kleiner als jede angebbare Grösse, also Null; der Satz ist also allgemein gültig.

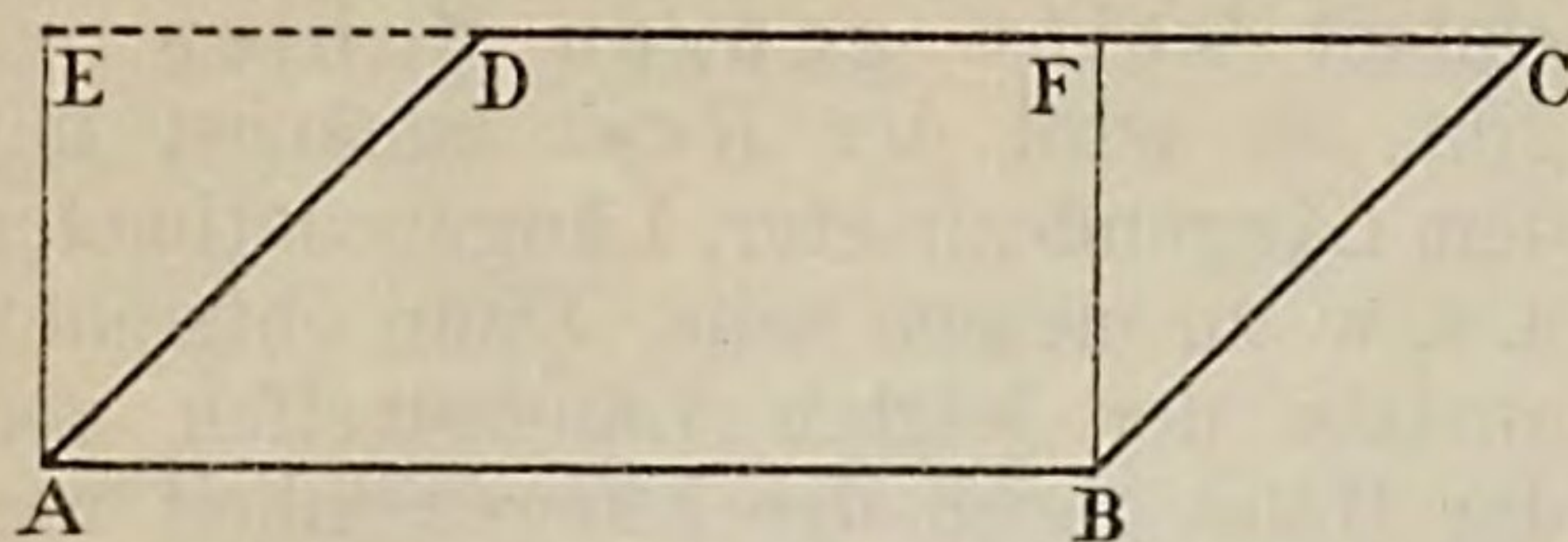
Erkl. 30. Die Fehlergrösse bei der Ausmessung von Rechtecken mit inkommensurablen Seiten lässt sich folgendermassen bestimmen. Liegen die wirklichen Werte a und b der Seiten zwischen α und $\left(\alpha + \frac{1}{10^n}\right)$ bzw. zwischen β und $\left(\beta + \frac{1}{10^n}\right)$ (wobei α und β Dezimalbrüche des Meters sind, welche auf n Stellen genau sind), so liegt der Inhalt ab des Rechtecks zwischen $\alpha \cdot \beta$ und $\left(\alpha + \frac{1}{10^n}\right) \cdot \left(\beta + \frac{1}{10^n}\right) = \alpha\beta + \frac{\alpha + \beta}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}}$. Der Unterschied beider Angaben ist also $\frac{1}{10^n} \left(\alpha + \beta + \frac{1}{10^n}\right)$, und der Fehler ist kleiner als dieser Unterschied. Je grösser also n gewählt wird, desto kleiner muss der Fehler werden, und für unendliches n wird der theoretische Fehler vollständig verschwinden. Praktisch wird dies allerdings schon dann eintreten, wenn n nur wenige Einheiten beträgt, d. h. wenn die Längen auf mehrere Dezimalstellen genau gewählt werden.

Antwort. 1) Wenn die Messung der Seiten a und b durch die Längeneinheit keine ganzen Zahlen ergibt, so wird der Rest zunächst mit dem Längendezimeter, Längencentimeter u. s. w. zu messen sein. Dann entstehen anstatt der letzten Längsstreifen von der Höhe gleich der Längeneinheit nur solche von der Höhe gleich einem oder mehreren Zehnteln, Hunderteln u. s. w. der Längeneinheit. Misst man also danach die Fläche statt in Quadratmetern jetzt in Quadratdezimetern, Quadratcentimetern u. s. w., so wird die Längenmessung ganze Zahlen in den kleineren Längeneinheiten, also die Flächenbestimmung auch wieder ganze Zahlen in den kleineren Flächeneinheiten ergeben, oder Dezimalbrüche der grossen Flächeneinheit nach der Tabelle der Beziehungen dieser Einheiten (s. Erkl. 20).

2) Sind aber von den Längen der Rechtecksseiten die eine oder beide mit der Längeneinheit inkommensurabel (siehe Erkl. 100 des I. Teiles), so wird auch bei der Messung mit dem kleineren Bruchteil der Längeneinheit immer noch ein Rest übrig bleiben, also auch ein Fehler in der Flächenbestimmung. Dieser Rest und mit ihm der Fehler wird aber um so kleiner, je kleiner das gewählte Längenmass; und derselbe wird kleiner gemacht werden können, als jede angebbare Grösse, indem man den gewählten Bruchteil der Längeneinheit entsprechend verkleinert. Somit hat auch in diesen beiden Fällen der Satz vollkommene Gültigkeit, dass der Rechtecksinhalt das Produkt zweier anstossenden Seiten ist.

Frage 13. Wie lässt sich mit Hilfe des Satzes 1 die Fläche eines beliebigen Parallelogramms bestimmen?

Figur 3.



Erkl. 31. Dass das $\triangle ADE \cong BCF$ ist, kann gefolgert werden aus deren Deckung bei Verschiebung um die Strecke $AB = EF = DC$, oder auf Grund irgend eines der vier Kongruenzsätze, denn es ist $AD = BC$, $AE = BF$, $ED = EC - DC = EC - EF = FC$ und wegen der parallelen Seiten auch jeder Winkel im einen Dreieck gleich dem entsprechenden Winkel im andern.

Erkl. 32. Wird das Parallelogramm $ABCD$ zum Rhombus, so wird in Satz 3 die Beifügung unnötig, dass die zugehörige Höhe mit der gewählten Seite multipliziert werden muss. Denn wie aus Erkl. 665 des III. Teiles hervorgeht, hat das Rhombus zwei gleich lange Höhen. Umgekehrt könnte die Gleichheit der Höhen des Rhombus gerade am nebenstehenden Satz bewiesen werden. Denn ist die Seite a , die Höhen h_1 oder h_2 , so ist die Fläche $a \cdot h_1 = a \cdot h_2$, folglich $h_1 = h_2$.

Erkl. 33. Den in letzter Erkl. 32 zugrundeliegenden Schluss könnte man rückwärts als Umkehrung von Satz 3 folgendermassen aussprechen:

Satz. Parallelogramm von gleichem Flächeninhalt, welche gleiche Grundseite (oder Höhe) haben, haben auch gleiche zugehörige Höhe (oder Grundseite).

Erkl. 34. Für das Quadrat und Rechteck wird Satz 3 mit Satz 1 identisch, da Seite und Höhe zusammenfallen. Beim Quadrat ist also der Inhalt angegeben durch die zweite Potenz einer Seite. Und eben daher rührt auch die Ausdrucksweise, dass in der Algebra eine Grösse von der Form $a \cdot a$ oder a^2 auch gesprochen wird „ a im Quadrat“ oder „ a Quadrat“ statt „ a hoch 2“.

Frage 14. Welche besonderen Eigentümlichkeiten des Parallelogramms ergeben sich aus den vorigen Sätzen?

Antwort. Um die Fläche eines beliebigen Parallelogramms $ABCD$ (siehe Figur 3) zu ermitteln, ziehe man in zwei Eckpunkten einer Seite die Höhen desselben: $AE \perp BF$. Diese beiden Strecken bilden dann das Rechteck $ABFE$, dessen Fläche nach den bisherigen bekannt ist. Die so entstehende Gesamtfigur $ABCE$ enthält nun die zwei Dreiecke ADE und BCF , welche unmittelbar als kongruent erkannt werden. Daher muss auch gleichviel erhalten werden, ob man von dieser Gesamtfigur $ABCE$ das eine oder das andere dieser Dreiecke wegnimmt. Daher ist $ABCE - AED =$ Parallelogramm $ABCD = ABCE - BCF =$ Rechteck $ABFE$. Man kann daher die Aussage machen:

Satz 2. Jedes Parallelogramm ist inhaltsgleich mit einem Rechteck von gleicher Grundseite und Höhe.

Oder noch allgemeiner:

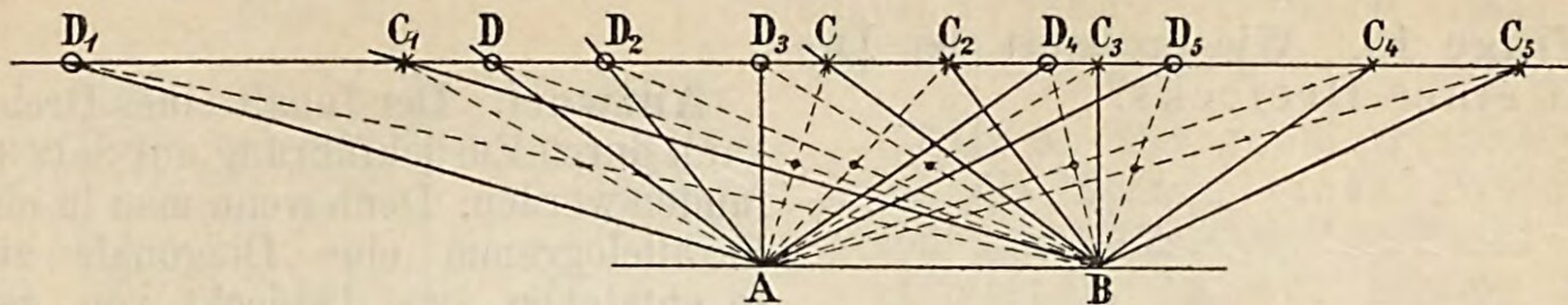
Satz 2a. Alle Parallelogramme, welche in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen, sind inhaltsgleich.

Und die Zusammenfassung der Sätze 1 und 2 liefert allgemein:

Satz 3. Der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus einer Seite und ihrer zugehörigen Höhe.

Antwort. 1) Aus Satz 2a ergibt sich, dass ein Parallelogramm inhaltsgleich bleibt, wenn man zwei Gegen-

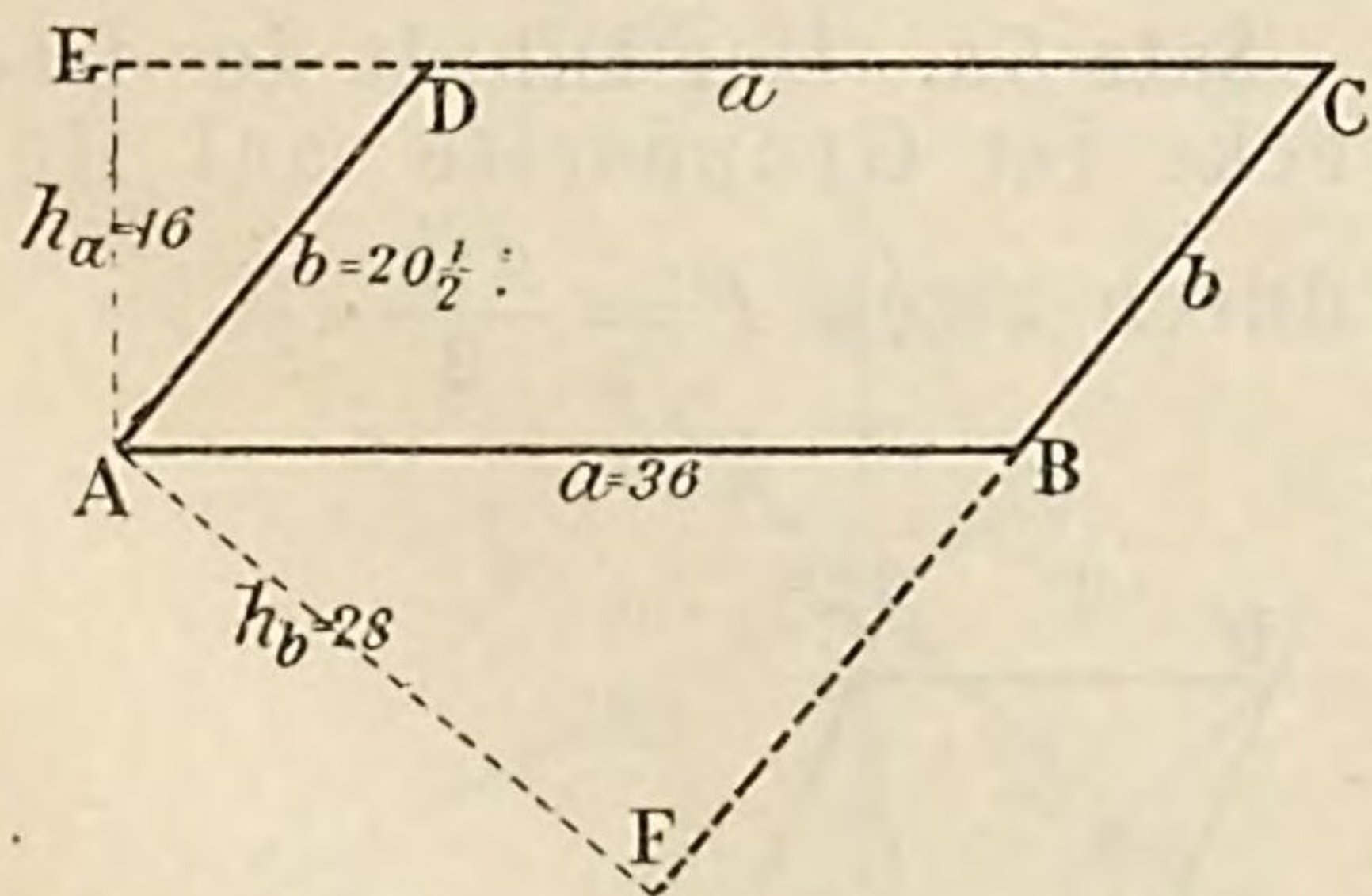
Figur 4.



Erkl. 35. Die Eigenschaften der verschiedenen Parallelogramme in Figur 4 nach ihrer Gestalt sind einzeln besprochen in Aufgabe 286 des III. Teiles. Man könnte den nebenstehenden Satz 4 auch in der Ausdrucksweise auffassen, dass man aussagt: Wenn auf zwei gegebenen parallelen Geraden an beliebigen Stellen dieselbe Strecke ausgeschnitten wird, so begrenzen die Verbindungslinien ihrer Endpunkte stets ein Parallelogramm von gleicher Grösse. Also wo immer in Figur 4 die Strecke CD liegt, wenn sie nur stets gleich bleibt, so bleibt auch das $\#$ gr $ABCD$ inhaltsgleich.

Erkl. 36. Die Verschiebbarkeit des Parallelogramms bei gleichbleibendem Inhalte findet besonders zahlreiche Anwendungen bei der sog. Verwandlung der Figuren (siehe Frage 68).

Figur 5.



Erkl. 37. Die Höhe des $\#$ grs als Abstand zweier Parallelen kann an jeder Stelle der Seite gezogen werden. In Figur 5 ist dies von der Ecke A aus geschehen. Wenn also dort $a = 36$ mm, $b = 20 \frac{1}{2}$ mm, $h_a = 16$ mm, $h_b = 28$ mm, so wird $ABCD$ entweder $= a \cdot h_a = 36 \cdot 16$ qmm $= 576$ qmm, oder $= b \cdot h_b = 20 \frac{1}{2} \cdot 28$ qmm $= 574$ qmm. Solche Unterschiede von wenigen Einheiten werden sich fast immer ergeben, wenn nicht ganz scharfe Längenmessungen vorgenommen werden. Die Abschätzung der Fehler geschieht am besten in Prozenten der Gesamtziffer, also hier 2 auf 575 oder etwa $\frac{1}{3}$ 0/o. Zur praktischen Verwendung benutzt man dann am besten das Mittel aus mehrfachen gleichwertigen Resultaten, also hier 575 qmm.

seiten desselben so um die Eckpunkte einer dritten Seite dreht, dass die vierte Seite auf derselben geraden Linie verbleibt. Es sind also in Figur 4 alle Parallelogramme über der Seite AB gleichgross:

$$ABCD = ABC_1D_1 = ABC_2D_2 = ABC_3D_3 \dots$$

Denn alle haben dieselbe Grundseite AB und dieselbe Höhe, nämlich den Abstand der Parallelen $AB \parallel CD$. Man erhält also die Aussage:

Satz 4. Der geometrische Ort für die Gegenseite eines Parallelogramms von gegebener Grundseite und bestimmtem Inhalt ist die Parallele zur Grundseite im Abstände gleich der Höhe des Parallelogramms.

2) Da bei der allgemeinen Gültigkeit des Satzes 3 keine Rücksicht zu nehmen ist, welche der vier bzw. der zwei verschiedenen Seitenstrecken des Parallelogramms gerade als Grundseite gewählt ist, so erkennt man, dass die beiden Seitenstrecken und ihre zugehörigen Höhen in fester Beziehung zueinander stehen. Denn der Inhalt des Parallelogramms in Fig. 5 ist sowohl $a \cdot h_a$ als auch $b \cdot h_b$, also muss $a \cdot h_a = b \cdot h_b$ sein, d. h. das Produkt aus je einer Seite und der zugehörigen Höhe hat beim Parallelogramm beidemale dieselbe Grösse.

Man hat demnach hierin ein Mittel, um je eines dieser vier Stücke rechnermässig zu bestimmen, wenn die drei anderen gegeben sind. Es ist nämlich:

$$a = \frac{b \cdot h_b}{h_a}, \quad b = \frac{a \cdot h_a}{h_b},$$

$$h_a = \frac{b}{a} \cdot h_b, \quad h_b = \frac{a}{b} \cdot h_a.$$

b) Ueber das Dreieck und die übrigen Vielecke.

Frage 15. Wie gross ist der Inhalt eines Dreiecks?

Erkl. 38. In Figur 6 ist jedesmal:

$$\triangle ABC = \triangle ACD = \frac{ABCD}{2} = ABD = BDC;$$

denn sowohl Diagonale AC , als BD teilen das $\square$ in je zwei kongruente Dreiecke. Da aber die Diagonalen selbst nicht gleichlang sind (ausser beim Rechteck), so sind die Dreiecke ABC und ABD nicht kongruent, wohl aber inhaltsgleich.

Erkl. 39. Wenn die Dreiecksfläche gleich dem halben Produkte aus Grundseite und Höhe gesetzt wird, so ist wieder darauf zu achten, dass das Produkt zweier Strecken ein algebraischer Ausdruck ist und soviel heisst, als die Fläche des Rechtecks mit den gegebenen Strecken als Seiten.

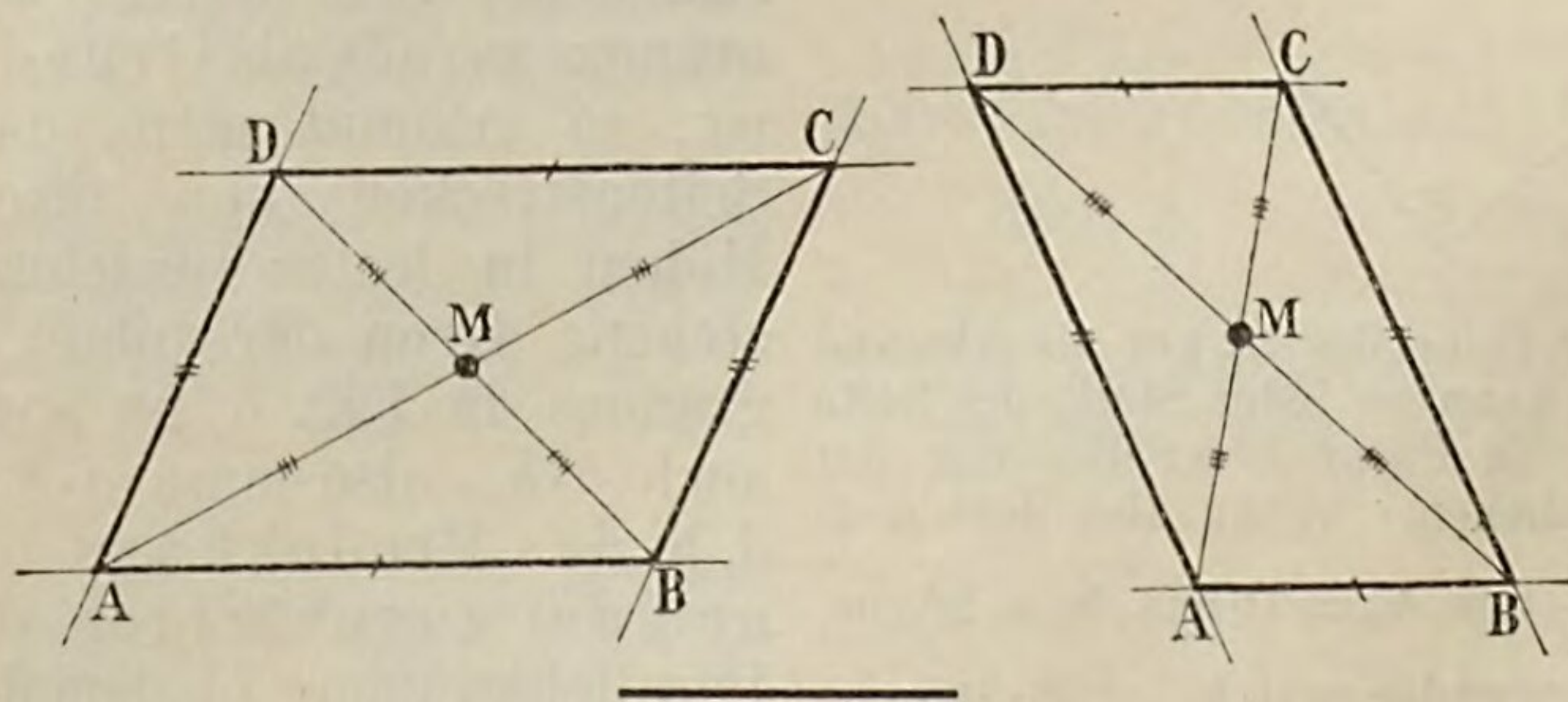
Antwort. Der Inhalt eines Dreiecks kann durch Zurückführung auf Satz 3 gefunden werden. Denn wenn man in einem Parallelogramm eine Diagonale zieht, so entstehen zwei Dreiecke von genau gleichgrossem Flächeninhalt. Durch eine Drehung um den Mittelpunkt des Parallelogramms kommen nämlich die beiden Dreiecke zur vollkommenen Deckung. Daher ist jedes Dreieck gleich der Hälfte des Parallelogramms, mit welchem dasselbe eine Grundseite und zugehörige Höhe gleich hat. Es entsteht also die Aussage:

Satz 5. Man erhält die Anzahl der Flächeneinheiten eines Dreiecks, indem man die Anzahl der Längeneinheiten einer Seite und der zugehörigen Höhe miteinander multipliziert und das Produkt halbiert.

Oder etwas ungenauer aber kürzer:

Satz 5a. Der Inhalt des Dreiecks ist Grundseite mal Höhe durch zwei: $F = \frac{g \cdot h}{2}$.

Figur 6.

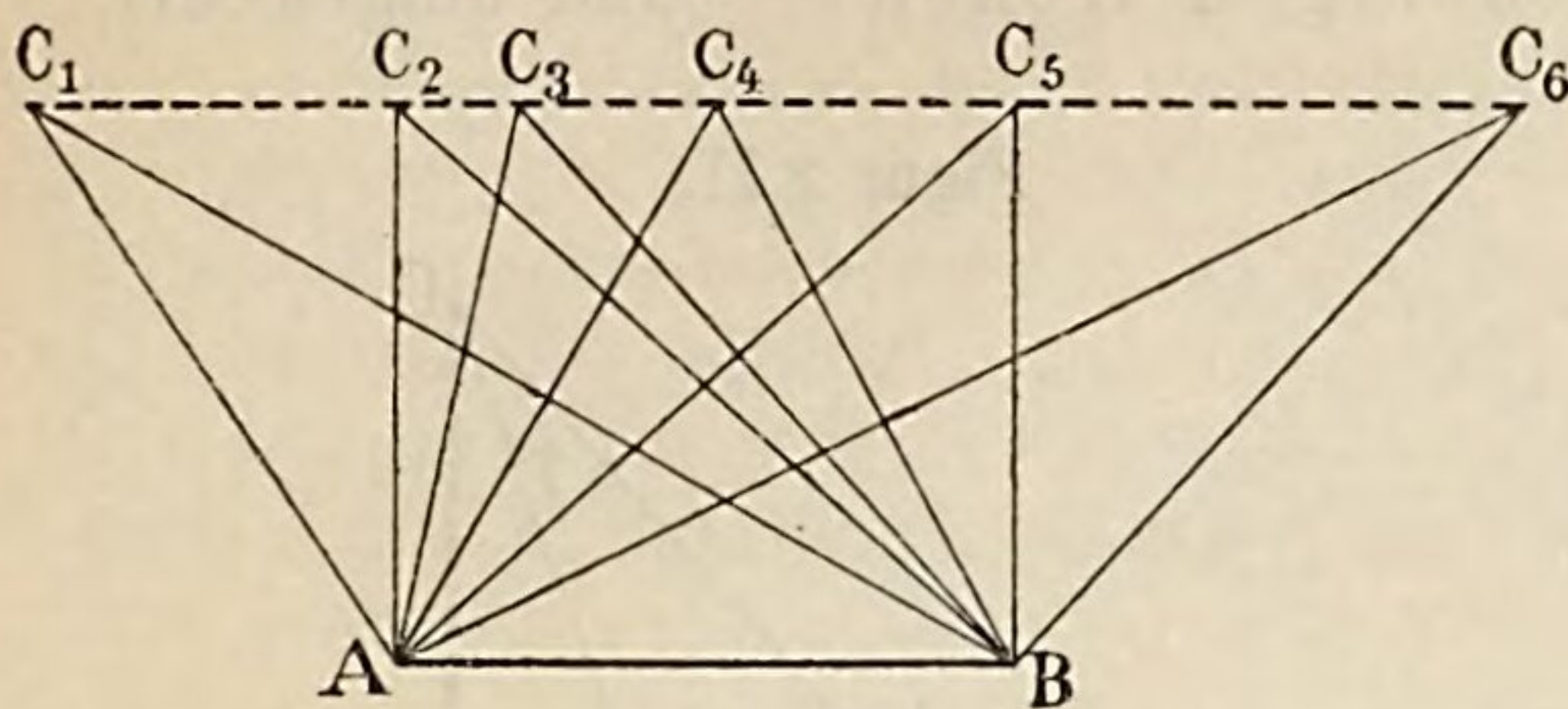


Frage 16. Welche besonderen Eigentümlichkeiten des Dreiecks ergeben sich aus vorigen Sätzen?

Erkl. 40. Unter den sämtlich inhaltsgleichen Dreiecken der Figur 7 sind einige besonders bemerkenswerte Gruppen: ABC_1 und benachbarte stumpfwinklig bei α , ABC_2 rechtwinklig (α), ABC_3 und benachbarte spitzwinklig, ABC_4 gleichschenkelig mit Spitze C_4 , ABC_5 rechtwinklig bei β , ABC_6 und benachbarte stumpfwinklig bei β .

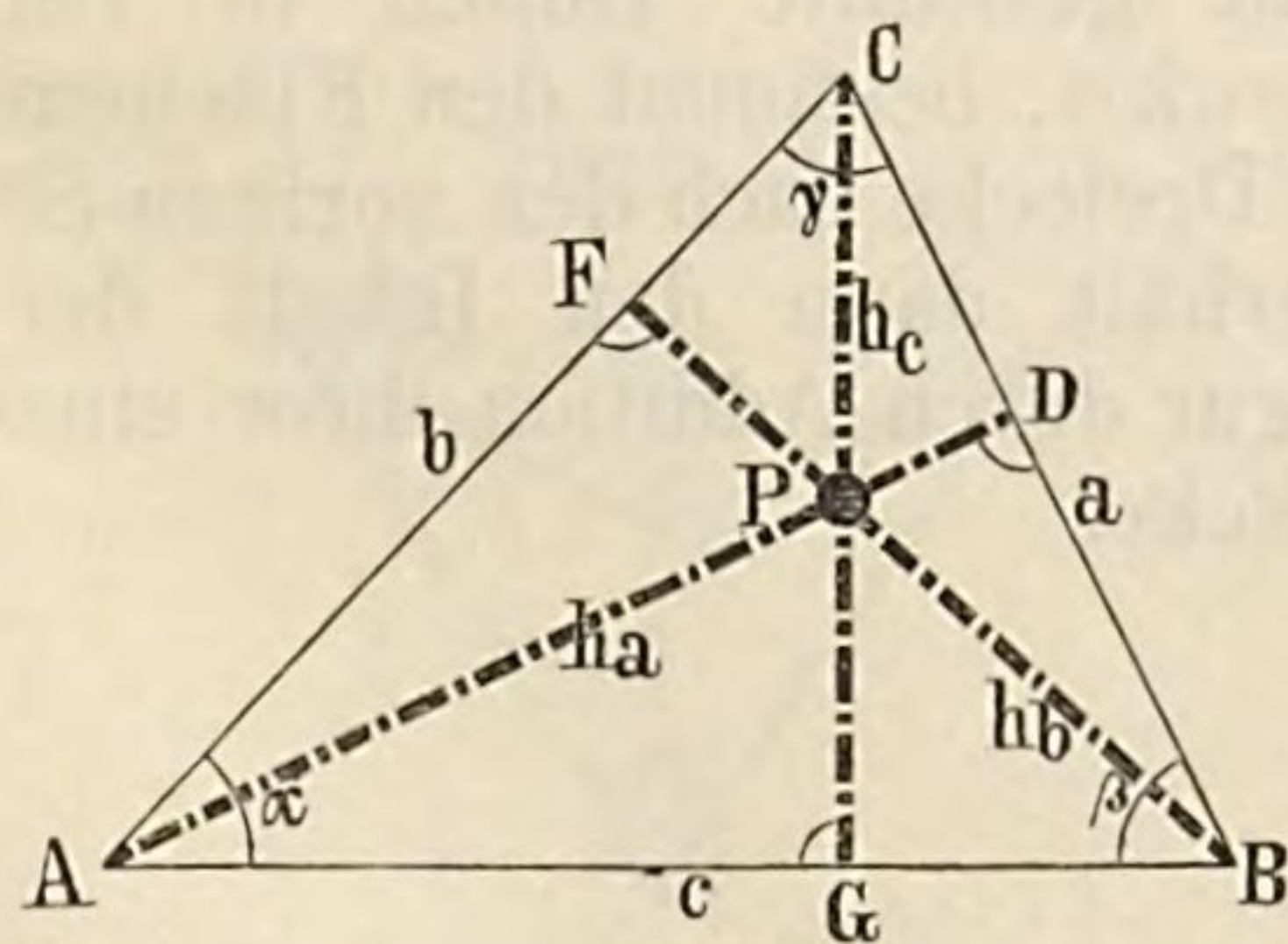
Antwort. 1) Da jedes Dreieck gleich der Hälfte eines Parallelogramms ist, so muss bei Anwendung des Satzes 4 zugleich mit dem Parallelogramm auch das Dreieck „verschoben“ werden können, ohne dass sein Inhalt sich ändert. Der Dreiecksinhalt bleibt also gleich gross, wenn die Spitze des Dreiecks auf der durch sie

Figur 7.



Erkl. 41. Es ist beim Dreieck je nach den Winkeln zu unterscheiden, welche Lage die Höhe einnimmt. So fallen nur beim spitzwinkligen Dreieck alle drei Höhen innerhalb des Dreiecks, beim stumpfwinkligen aber deren zwei ausserhalb des Dreiecks. Beim rechtwinkligen Dreieck fällt je eine Höhe mit einer Seite zusammen. Dasselbe ist auch in der That die Hälfte eines Rechtecks, also das halbe Produkt der beiden Seiten: $F = \frac{a \cdot b}{2}$.

Figur 8 I.



Erkl. 42. Ebenso wie in Erkl. 37 für Fig. 5, so müssen auch in Figur 8 dieselben Produkte auftreten, wenn man die Strecken ziffermässig in die Rechnung einsetzt. So ist in Figur 8, I (alles in mm):

$$a = 32, \quad b = 39 \quad c = 41;$$

$$h_a = 36 \frac{1}{2}, \quad h_b = 30, \quad h_c = 28 \frac{1}{2};$$

Also die Fläche in qmm:

$$\frac{a h_a}{2} = 584, \quad \frac{b h_b}{2} = 585, \quad \frac{c h_c}{2} = 584 \frac{1}{4},$$

also im Mittel mit $\frac{1}{6}$ Prozent Fehler:

$$584 \frac{1}{2} \text{ qmm.}$$

gehenden Parallelen zur Grundseite verschoben wird. Man erhält daher die Aussage:

Satz 6. Der geometrische Ort für die Spitze eines Dreiecks von gegebener Grundseite und bestimmtem Inhalt ist die Parallele zur Grundseite durch die Spitze des Dreiecks.

2) Da bei der allgemeinen Gültigkeit des Satzes 5 keine Rücksicht zu nehmen ist, welche der drei Seitenstrecken des Dreiecks als Grundseite gewählt ist, so erkennt man, dass die drei Seiten und Höhen des Dreiecks in fester Beziehung zueinander stehen müssen. Der Inhalt des Dreiecks ist nämlich:

$$\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2},$$

also muss:

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$$

sein, d. h. das Produkt einer Seite und der zugehörigen Höhe hat bei einem Dreieck stets dieselbe Grösse.

Man hat demnach auch hier ein Mittel, um aus je dreien dieser Stücke ein viertes rechnermässig zu bestimmen.

$$a = \frac{b h_b}{h_a} = \frac{c h_c}{h_a}, \quad b = \frac{c h_c}{h_b} = \frac{a h_a}{h_b},$$

$$c = \frac{a h_a}{h_c} = \frac{b h_b}{h_c}, \quad h_a = \frac{b h_b}{a} = \frac{c h_c}{a},$$

$$h_b = \frac{c h_c}{b} = \frac{a h_a}{b}, \quad h_c = \frac{a h_a}{c} = \frac{b h_b}{c}.$$

3) In Berücksichtigung dieser Gleichheiten kann man ferner die Proportionen ansetzen:

$$a : b = h_b : h_a = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b}$$

$$b : c = h_c : h_b = \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$$

$$c : a = h_a : h_c = \frac{1}{h_c} : \frac{1}{h_a}.$$

Also in fortlaufender Proportion:

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$$

und umgekehrt:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}; \text{ d. h.}$$

Ebenso erhält man in Figur 8, II:

$$a = 40, \quad b = 51 \frac{1}{2}, \quad c = 21;$$

$$h_a = 20, \quad h_b = 15 \frac{1}{2}, \quad h_c = 38;$$

$$\frac{a h_a}{2} = 400, \quad \frac{b h_b}{2} = 399 \frac{1}{8}, \quad \frac{c h_c}{2} = 399;$$

also im Mittel mit $\frac{1}{4}$ Prozent Fehler:

$$399 \frac{3}{8} \text{ qmm.}$$

Erkl. 43. Beim rechtwinkligen Dreieck entsteht eine besonders bemerkenswerte Beziehung zwischen der allein in Betracht kommenden Hypotenusenhöhe und den beiden Katheten. Der Inhalt ist nämlich nach Erkl. 41:

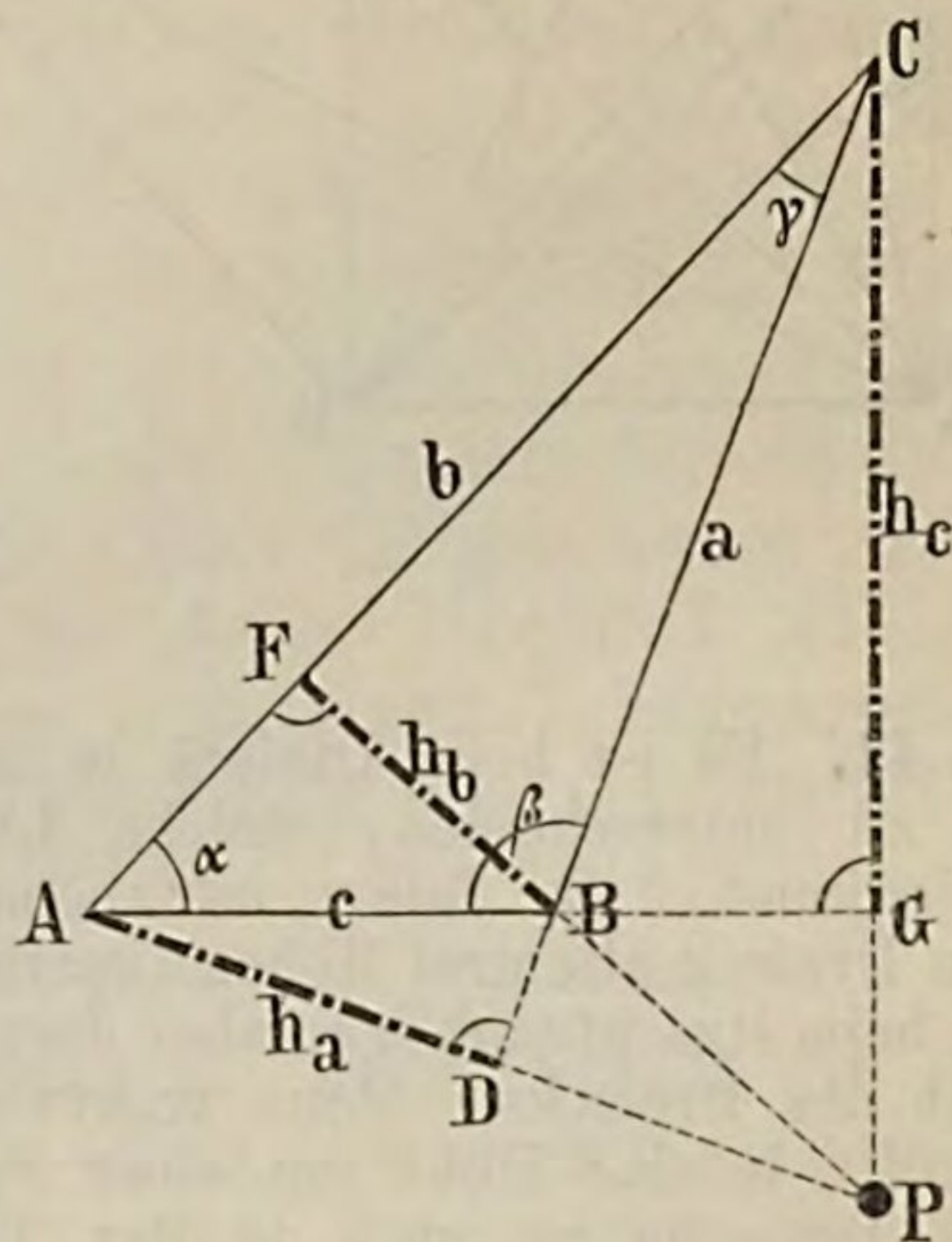
$$\frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2};$$

also $a \cdot b = c \cdot h_c$ oder:

$$h_c = \frac{a \cdot b}{c}.$$

die drei Seiten eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Höhen — und umgekehrt.

Figur 8 II.



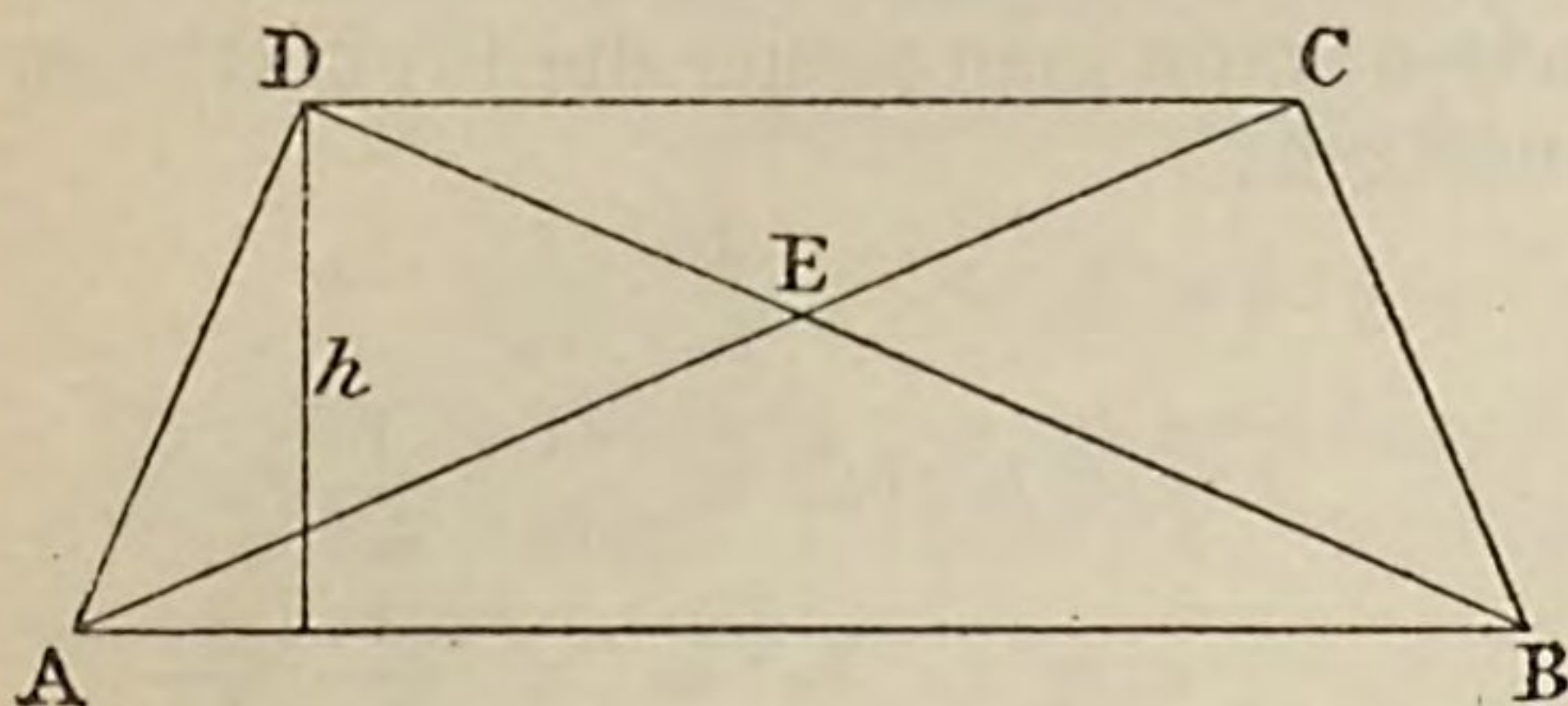
Frage 17. Wie bestimmt man den Flächeninhalt einer beliebigen geradlinigen Figur?

Erkl. 44. Die Teilungslinien einer Figur können die Diagonalen eines Vielecks sein, oder Verbindungslinien seiner Ecken mit einem bestimmten Punkte in derselben Ebene, welcher auf dem Vieleck, ausserhalb oder innerhalb desselben gelegen sein kann. Beispiele derselben bilden die Antworten der folgenden Fragen.

Antwort. Um den Flächeninhalt einer beliebigen geradlinigen Figur zu ermitteln, teilt man dieselbe durch passend gewählte Linien in einzelne Dreiecke, bestimmt den Flächeninhalt dieser Dreiecke nach den vorigen Sätzen, und erhält dann den Inhalt der Gesamtfigur durch Addition ihrer einzelnen Teilstücke.

Frage 18. Wie gross ist die Fläche eines Paralleltrapezes?

Figur 9.



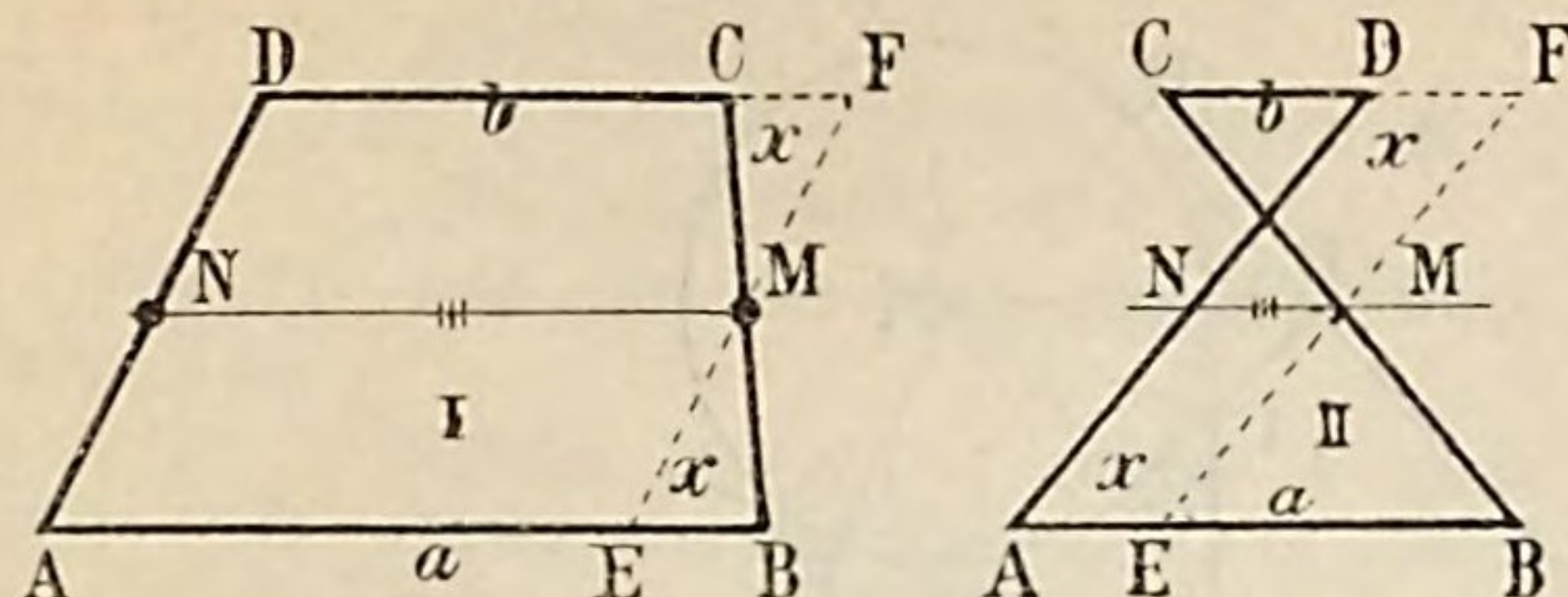
Erkl. 45. Die Ergebnisse der beiden nebenstehenden Ueberlegungen decken sich vollständig; denn nach Satz 75 des III. Teiles ist die Mittelparallele des Trapezes gleich der halben Summe der Grundseiten. Umgekehrt können die nebenstehenden Ausführungen als Beweis dieser Beziehung angesehen werden.

Antwort. Zur Inhaltsberechnung des Trapezes kann man auf verschiedene Weise verfahren.

1) Man ziehe eine Diagonale BD des Trapezes und betrachte die so entstandenen Dreiecke ABD und BCD in Figur 9. Davon kann angesehen werden für $\triangle ABD$: als Grundseite $AB = a$, Spitze D , als Höhe der Abstand h der Parallelen; für $\triangle BCD$: als Grundseite $CD = b$, Spitze B , als Höhe wieder der Abstand der beiden Parallelen $= h$; also ist:

$$ABD = \frac{a h}{2}, \quad BCD = \frac{b h}{2}$$

Figur 10.

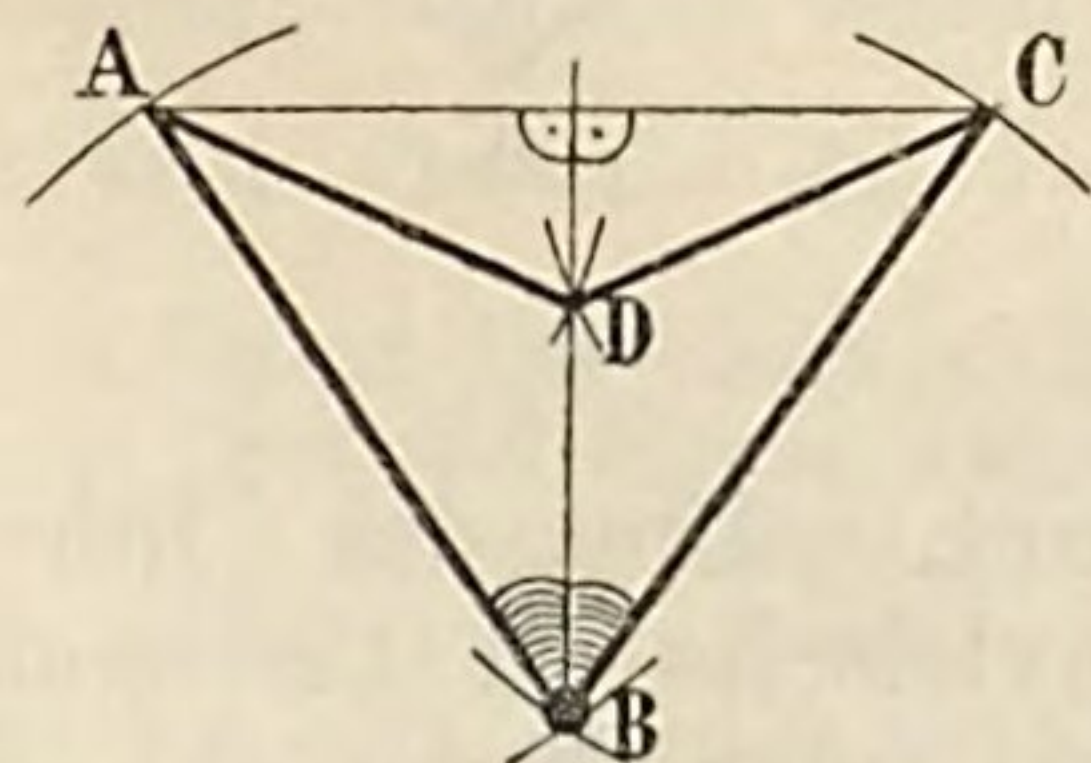


Erkl. 46. Es ist unschwer zu erkennen, dass Satz 7 seine Geltung nebst beiden Beweisen behält für das überschlagene Trapez in Figur 10, II. Dabei wäre nach Erkl. 290 und 291 im III. Teile die obere Grundseite negativ anzusetzen, die Mittelstrecke also $m = \frac{a-b}{2}$.

Dann wird als Fläche des Trapezes dargestellt die Differenz des grösseren und des kleineren der beiden Scheiteldreiecke. Wären beide Dreiecke gleichgross, so wäre ihre Differenz Null, aber auch die Mittellinie und der Inhalt gleich Null.

Frage 19. Wie gross ist der Inhalt eines Deltoids?

Figur 11.



Erkl. 47. Figur 11 stellt ein Deltoid mit einspringendem Winkel dar, bei welchem der Beweis wörtlich ebenso gilt, wie für das gewöhnliche. Als Deltoide besonderer Art fallen auch Rhombus und Quadrat unter die Gültigkeit des nebenstehenden Satzes. Also ist auch beim Rhombus der Flächeninhalt gleich dem halben Produkt der Diagonalen, der Flächeninhalt des Quadrats gleich dem halben Quadrat der Diagonale.

Erkl. 48. Aus letzterem Ergebnis erhält man sofort das andere, dass im Quadrat mit Diagonale e und Seite a :

$$a^2 = \frac{1}{2} e^2, \text{ also } e^2 = 2a \text{ oder } e = a\sqrt{2}$$

$$\text{und } a = \frac{e}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} e \sqrt{2}.$$

und

$$\begin{aligned} ABCD &= ABD + BCD = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} \\ &= \frac{h}{2} (a + b) = h \cdot \frac{a + b}{2}. \end{aligned}$$

2) Man ziehe die Mittelparallele des Trapezes und durch deren Endpunkt M die Parallele zu AD . Dann ist in Figur 10:

$$\triangle MBE = MCF,$$

also Trapez:

$$\begin{aligned} ABCD &= ABMN + NMCD = AEMN \\ &\quad + MBE + NMFD - MCF \\ &= AEMN + NMFD \\ &= \text{gr } AEFM = m \cdot h. \end{aligned}$$

Man erhält also die Aussage:

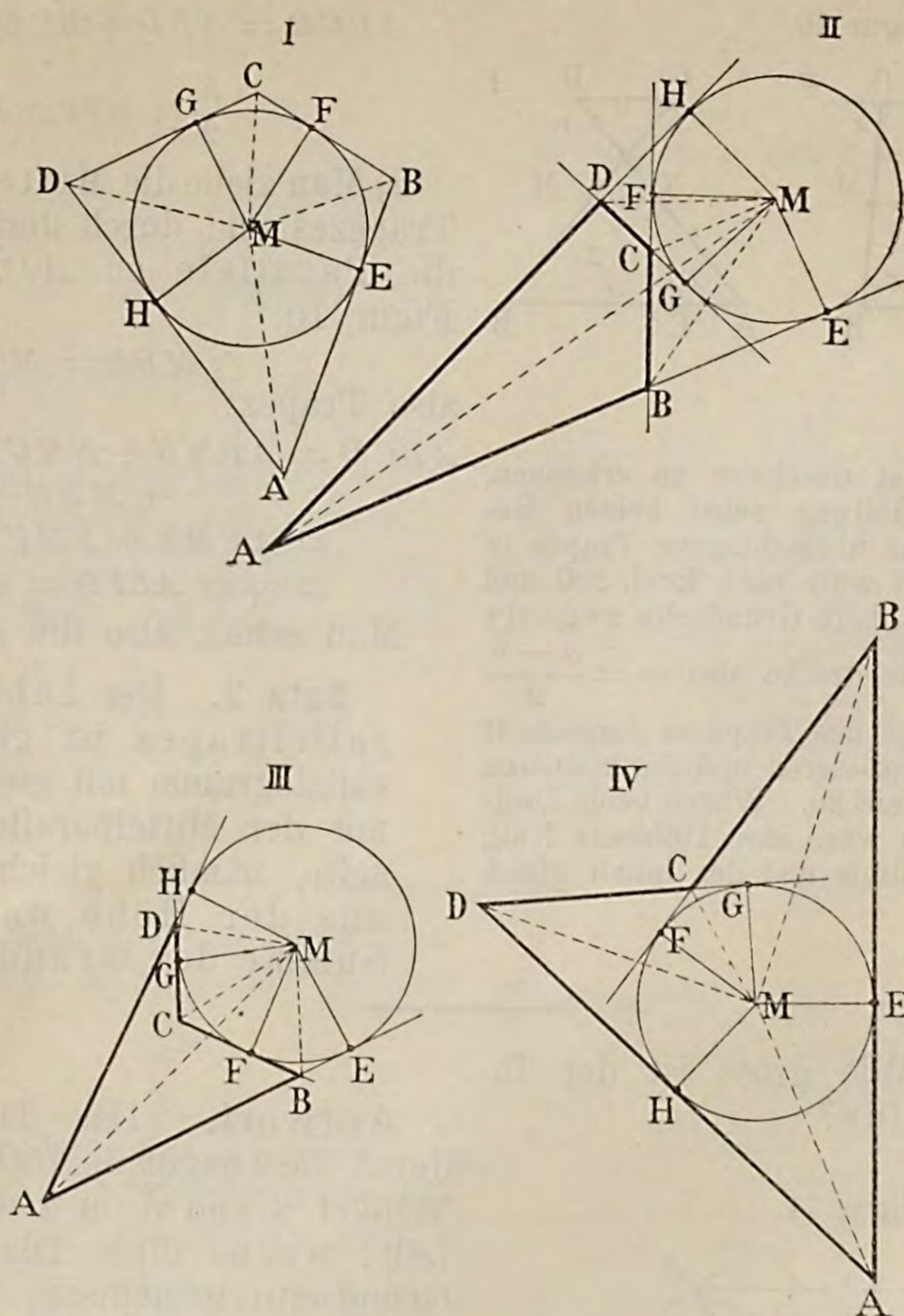
Satz 7. Der Inhalt eines Paralleltrapes ist gleich einem Parallelogramm mit gleicher Höhe und mit der Mittelparallelen als Grundseite, nämlich gleich dem Produkt aus der Höhe und der halben Summe der Grundseiten.

Antwort. Das Deltoid wird durch die Diagonale BD der ungleichen Winkel β und δ in zwei Dreiecke zerlegt, welche diese Diagonale BD als Grundseite gemeinsam haben, und als Höhe die Hälften der anderen Diagonalen AC . Daher ist der Inhalt des Deltoids:

$$\begin{aligned} ABCD &= BDA + BDC = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot \frac{AC}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot BD \cdot \frac{AC}{2} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD. \end{aligned}$$

Also ist der Inhalt des Deltoids (des Rhombus und Quadrats) gleich dem halben Produkte der beiden Diagonalen.

Figur 12.



Frage 20. Wie lässt sich der Inhalt eines Tangentenvielseits bestimmen?

Erkl. 49. In Figur 12 ist als Beispiel ein Viereck in seinen verschiedenen Gestalten als Tangentenvierseit gewählt. Es könnte natürlich ebensowohl ein Fünfeck, Sechseck u. s. w. zur Darstellung gewählt werden. Die Fig. 12, I und IV bleiben dabei wesentlich gleichartig. Bei Figuren II und III dagegen könnten neue Seiten nur an Stelle des Geradenzuges BCD eingeschoben werden, so dass also anstatt der zwei Seiten BC und CD drei, vier oder mehr eintreten würden. Der Winkel BAD aber als kleinster Tangentenwinkel bliebe erhalten.

Erkl. 50. Die Zerlegungs-dreiecke des Vielseits $ABCD$ wären in Figur 12:

- I) $+ABM$, $+BCM$, $+CDM$, $+DAM$,
- II) $+ABM$ (Höhe ME ausserhalb),
 $+ADM$ (Höhe MH ausserhalb),
 $-BCM$ (Höhe MF ausserhalb),
 $-CDM$ (Höhe MG ausserhalb).

Antwort. Um den Inhalt eines Tangentenvielseits zu bestimmen, verbinde man jeden Eckpunkt desselben mit dem Kreismittelpunkte.

1) Sind dann die Seiten des Vielseits $a, b, c, \dots$, der Kreis ein eingeschriebener, und sein Radius ρ , so wird das Vielseck genau ausgefüllt durch die sämtlichen Dreiecke, deren Grundseiten die Vielseckseiten $a, b, \dots$ sind und deren Spitzen sämtlich im Mittelpunkte M des Kreises liegen. Jedes dieser Dreiecke hat als Höhe die von der Spitze auf die Grundseite gefällte Senkrechte, und diese ist jedesmal der Radius des Kreises. Daher sind die Inhalte jener Dreiecke:

$$\frac{a \cdot \rho}{2}, \frac{b \cdot \rho}{2} \dots$$

III) $+ABM, +ADM$ (Höhen ME und MH ausserhalb),

$-BCM, -CDM$ (Höhen MF und MG innerhalb),

IV) $+ABM, +BCM, +CDM$ (Höhen MF, MG ausserhalb), $+DAM$.

Für II) und III) ist das ganze Viereck darstellbar:

$ABCD = \text{Viereck } ABMDA \text{ minus Viereck } MBCDM$. Davon ersteres Viereck $= \triangle AMB + AMD$, letzteres $= \triangle MCB + MCD$.

Erkl. 51. Man kann die Geltung des Satzes 8 auch auf den zweiten Fall nebenstehender Antwort ausdehnen, wenn man die besondere Festsetzung aufstellt, dass der Radius mit dem Vorzeichen seiner Richtung bei jeder einzelnen Seite in die Rechnung einzutreten hat. Dabei gilt derselbe als positiv, wenn seine Richtung nach derjenigen Seite der Linie geht, auf welcher die Innenfläche des Vielecks liegt; — negativ, wenn nach der andern Seite. Wenn der Radius als Höhe eines stumpfwinkligen Dreiecks nicht auf die Seitenstrecke selbst auftrifft, tritt darin keine Aenderung ein, denn jene beiden Seiten („Ufer“) der Linie sind durch diejenige Strecke auf derselben bestimmt, welche wirklich an die Innenfläche des Vielecks angrenzt.

Erkl. 51a. Für den letzten Ausdruck nebenstehender Antwort kann man setzen:

$$\frac{\rho'}{2} (a + n - b - c - d - \dots).$$

Da nun die Fläche nur einen positiven Wert haben kann, so lässt sich daraus schliessen, dass die Summe der beiden längsten Tangenten stets grösser bleibt, als die Summe aller andern Tangentenstücke, welche zwischen ihnen liegen können.

Frage 21. Welche Ergebnisse liefert die vorige Ueberlegung für die einfachsten Fälle der einem Kreise um- und angeschriebenen Figuren?

und ihre Summe gleich:

$$\frac{a\rho}{2} + \frac{b\rho}{2} + \frac{c\rho}{2} \dots =$$

$$\frac{\rho}{2} (a + b + c \dots) = \frac{\rho}{2} \cdot u,$$

indem man für $a + b + c \dots = u$ oder „Umfang“ des Vielecks setzt.

Man erhält also die Aussage:

Satz 8. Der Inhalt eines einem Kreise umgeschriebenen Vielecks ist gleich dem halben Produkte aus dem Radius des Inkreises und dem Umfange des Vielecks.

2) Ist der Kreis ein angeschriebener, sein Radius ρ' , so liegt der Kreis im Innenwinkel derjenigen zwei Seiten a und n , welche den kleinsten Tangentenwinkel bilden, für alle andern Seitenpaare aber im Nebenwinkel oder Scheitelwinkel. Jene beiden (als erste und letzte Seite des n -Ecks) sind dann auch die beiden einzigen, für welche die Richtung des Berührungsradius, also die Höhe des mit dem Kreismittelpunkt gebildeten Dreiecks, auf derselben Seite mit dem Innern des Vielecks liegt; für alle andern ist diese Richtung nach dem Aeussern des Vielecks gekehrt. Der Flächeninhalt des Vielecks wird schon vollständig überdeckt (und noch weitere Fläche dazu) durch die beiden Dreiecke der ersten und letzten Seite mit dem Kreismittelpunkt. Die wieder abzuziehende Fläche ist genau die Summe der mit sämtlichen andern Seiten entstehenden Dreiecke. Man erhält also für die Fläche des Vielecks:

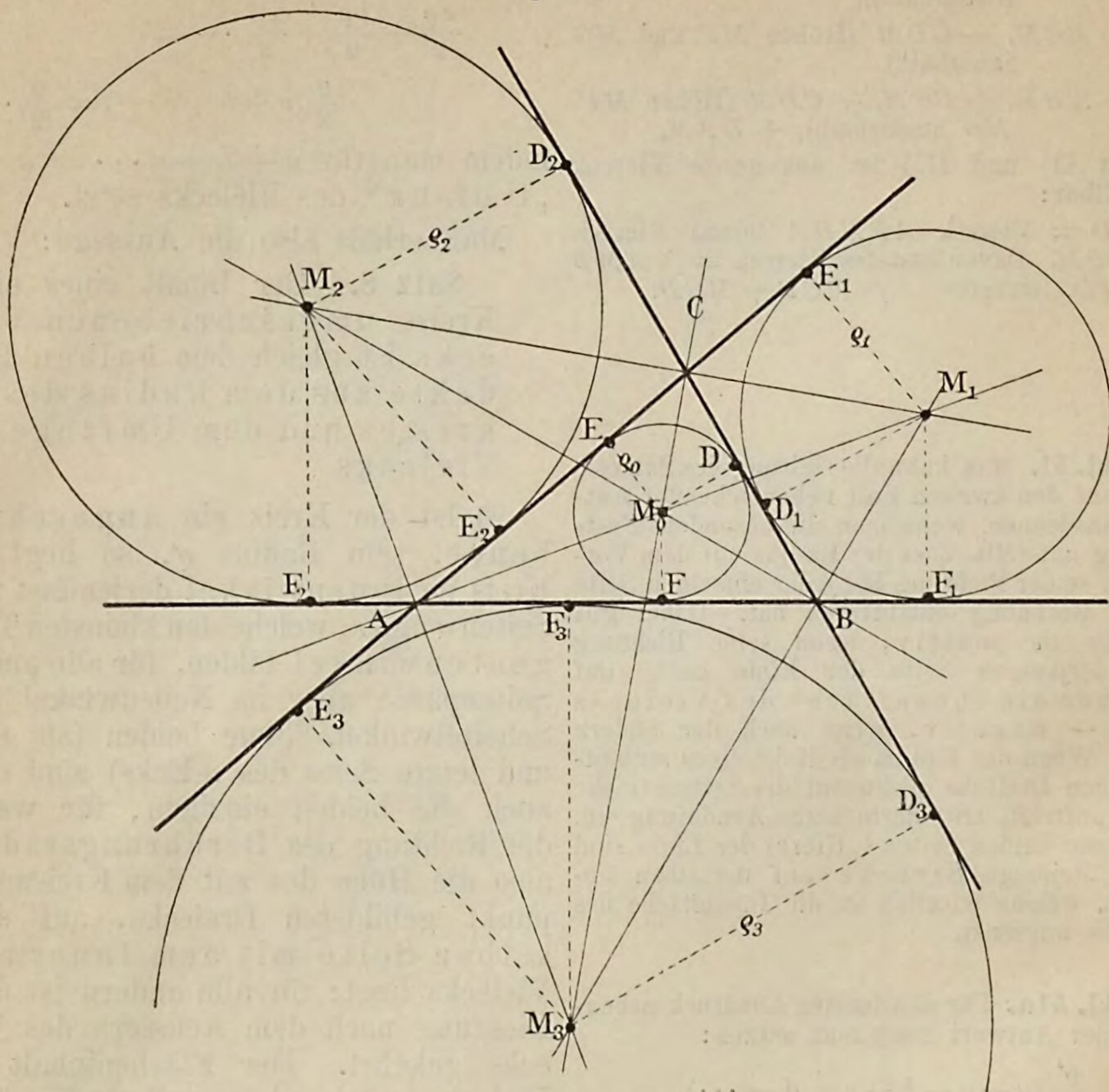
$$\frac{a\rho'}{2} - \frac{b\rho'}{2} - \frac{c\rho'}{2} - \dots + \frac{n\rho'}{2} = \frac{\rho'}{2} (a + n - b - c - \dots)$$

oder:

$$\frac{\rho'}{2} (2a + 2n - u).$$

Antwort. Der einfachste Fall des um- und angeschriebenen Vielecks ist das allgemeine Dreieck, da dieses stets einen eingeschriebenen und drei angeschriebene Kreise hat.

Figur 13.



Erkl. 52. Die nebenstehenden Ergebnisse sind besonders wieder rückwärts verwertbar für rechnermässigen Ausdruck der vier Radien. Man erhält nämlich aus der vierfachen Gleichung für q_0, q_a, q_b, q_c die Werte:

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{2F}{a+b+c} = \frac{F}{s}, \\ q_a &= \frac{2F}{-a+b+c} = \frac{F}{s-a}, \\ q_b &= \frac{2F}{a-b+c} = \frac{F}{s-b}, \\ q_c &= \frac{2F}{a+b-c} = \frac{F}{s-c}. \end{aligned}$$

Bei den drei letzten Werten beachte man besonders die Symmetrie der „cyclischen Vertauschung“, dass nämlich jeder Wert in den folgenden bzw. vorhergehenden übergeht, wenn ein jeder einzelne der drei Buchstaben a, b, c mit dem ihm folgenden bzw. vorhergehenden vertauscht wird.

Bezeichnet man daher mit q_0, q_a, q_b, q_c die Radien des eingeschriebenen, bzw. der den Seiten a, b, c angeschriebenen Kreise, so erhält man für die Fläche eines beliebigen Dreiecks nach dem verallgemeinerten Satz 8:

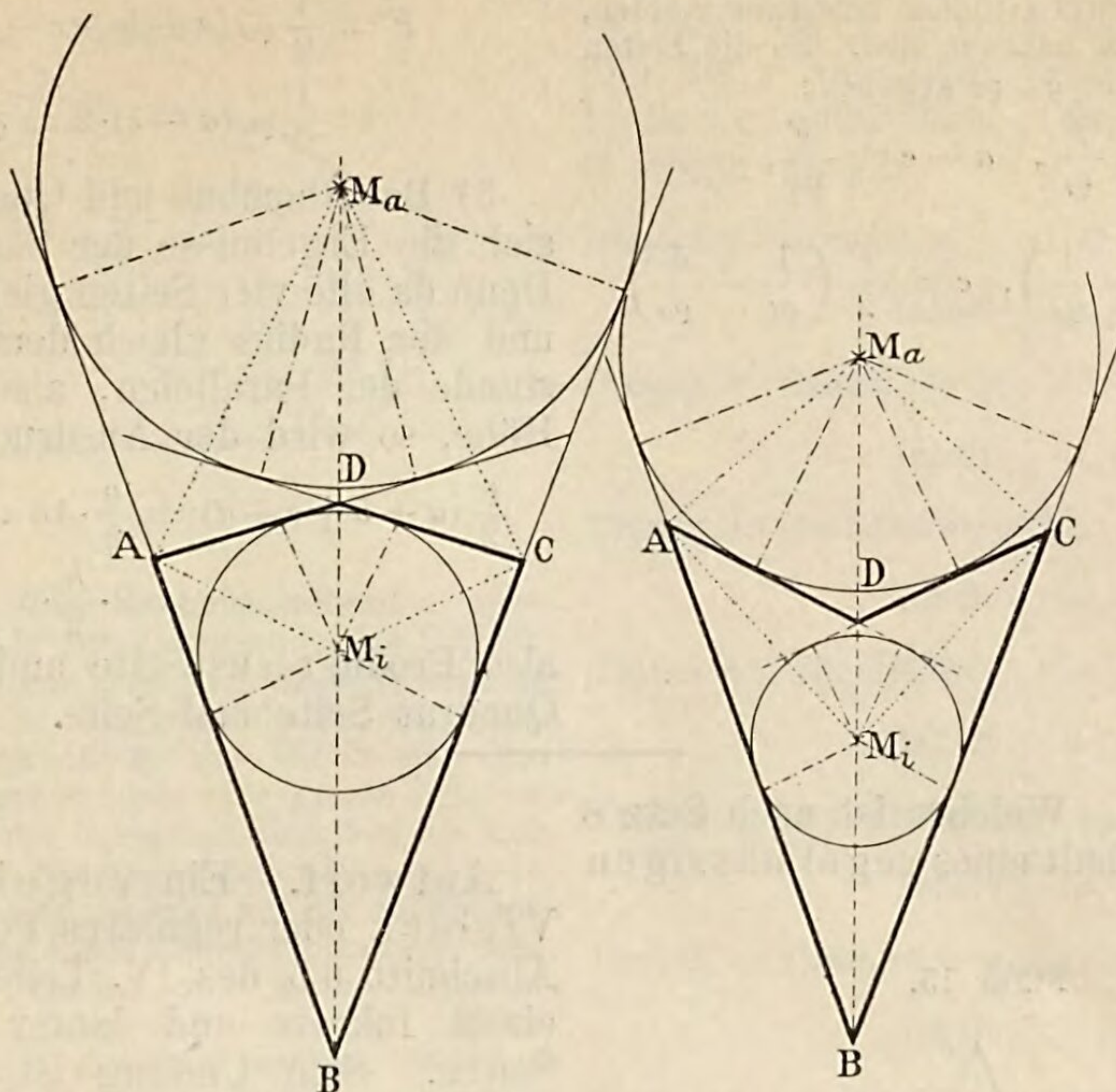
$$\begin{aligned} F &= \frac{q_0}{2} (a+b+c) = \\ &= \frac{q_a}{2} (-a+b+c) = \frac{q_b}{2} (a-b+c) \\ &= \frac{q_c}{2} (a+b-c). \end{aligned}$$

Denn es ist (siehe Figur 13) jeweils die mit dem Radius gleichnamige Seite, für welche der Radius nach der Aussen- seite des Dreiecks gerichtet ist.

Setzt man, wie in Antwort der Frage 66 des IV. Teiles, $a+b+c = 2s$, so entsteht:

$$F = q_0 \cdot s = q_a (s-a) = q_b (s-b) = q_c (s-c).$$

Figur 14.



Frage 22. Welche Anwendungen auf die besonderen Vierecke ergibt Satz 8?

Erkl. 53. Nach Antwort der Frage 86 des IV. Teiles sind Trapez und Antiparallelogramm im allgemeinen Falle keine Tangentenvierecke. Diese Figuren haben also nur in besonderen Fällen einen eingeschriebenen (bzw. das überschlagene zwei angeschriebene) Kreis.

Beim überschlagenen Trapez wäre als Inhalt die Differenz der beiden Dreiecke anzusetzen; beim Antiparallelogramm sind beide Dreiecke gleichgross (vergl. Figur 76, IV des IV. Teiles), also der Inhalt gleich deren Differenz gleich Null.

Erkl. 54. Umgekehrt kann wieder aus dem etwa bekannten Flächeninhalt eines Deltoids rechnermässig q_a und q_i bestimmt werden, nämlich:

$$q_i = \frac{F}{a+c}, \quad q_a = \frac{F}{a-c}.$$

Und unter Berücksichtigung der Antwort 19, wonach beim Deltoid $F = \frac{e \cdot f}{2}$ ist, findet man, dass Seiten, Diagonalen und Radien des Deltoids in bestimmter Beziehung stehen, nämlich:

$$e \cdot f = 2(a+c)q_i = 2(a-c)q_a.$$

Antwort. 1) Wenn ein Trapez oder ein Antiparallelogramm ein Tangentenviereck ist, so ist der Radius des ein- oder angeschriebenen Kreises jeweils die halbe Höhe, bzw. der halbe Abstand der Parallelen.

Man erhält also für den Inhalt:

$$J = \frac{q}{2} (a+b+c+d);$$

hierin ist $q = \frac{h}{2}$, und weil die Figur Tangentenviereck ist, $a+c = b+d$, also:

$$J = \frac{h}{4} (a+c) \cdot 2 = \frac{h}{2} (a+c),$$

wie auch in Satz 7 gefunden.

2) Beim Deltoid kann sowohl ein Kreis eingeschrieben, als auch ein solcher angeschrieben werden (siehe Figur 14). Daher kann durch die Radien q_i und q_a die Fläche folgendermassen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} q_i (a+b+c+d) \\ &= \frac{1}{2} q_i (a+c) \cdot 2 = q_i (a+c) \end{aligned}$$

Da dies zwei Gleichungen sind, so können und aus denselben zwei Grössen bestimmt werden, wenn die andern bekannt sind. So die Seiten a und c , wenn F , ϱ_a , ϱ_i gegeben:

$$a + c = \frac{F}{\varrho_i}, \quad a - c = \frac{F}{\varrho_a},$$

also:

$$a = \frac{F}{2} \left(\frac{1}{\varrho_i} + \frac{1}{\varrho_a} \right), \quad c = \frac{F}{2} \left(\frac{1}{\varrho_i} - \frac{1}{\varrho_a} \right).$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \varrho_a (a + b + c + d) \\ &= \frac{1}{2} \varrho_a (a - c) \cdot 2 = \varrho_a (a - c). \end{aligned}$$

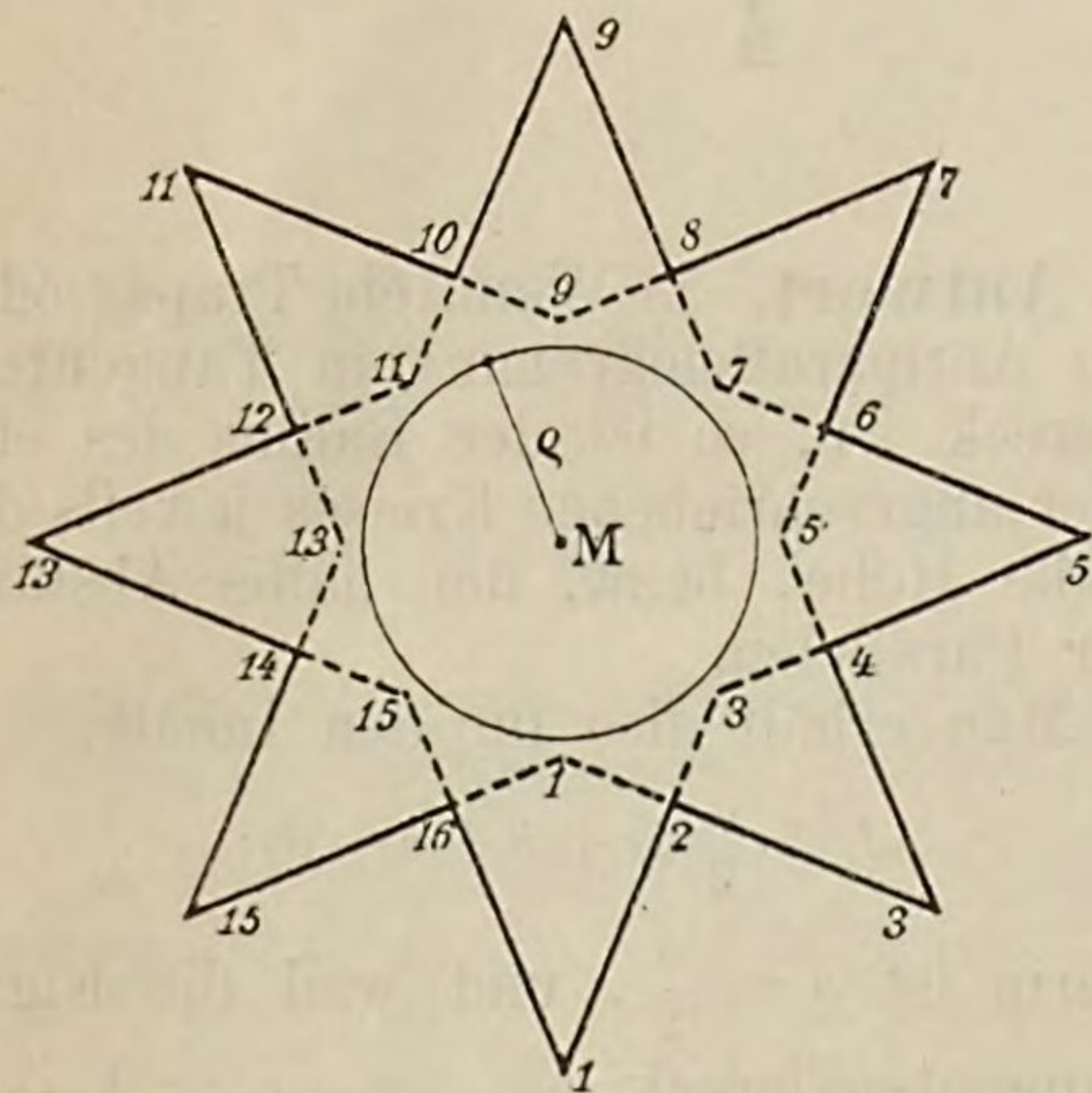
3) Bei Rhombus und Quadrat decken sich die Ergebnisse der Sätze 8 und 3. Denn da alle vier Seiten gleichgross sind und der Radius gleich dem halben Abstände der Parallelen, also der halben Höhe, so wird der Ausdruck:

$$\begin{aligned} \frac{\varrho}{2} (a + b + c + d) &= \frac{\varrho}{2} \cdot 4a = 2 \cdot \varrho \cdot a \\ &= 2 \cdot \frac{h}{2} \cdot a = h \cdot a, \end{aligned}$$

also Produkt aus Seite und Höhe, beim Quadrat Seite mal Seite.

Frage 23. Welches ist nach Satz 8 der Flächeninhalt eines regelmässigen Vielecks?

Figur 15.



Antwort. Ein regelmässiges Vieleck oder reguläres Polygon (siehe Abschnitt 6 b des IV. Teiles) hat stets einen Inkreis und lauter gleichlange Seiten. Sein Umfang ist daher beim n -Eck $u = n \cdot a$ und der Flächeninhalt:

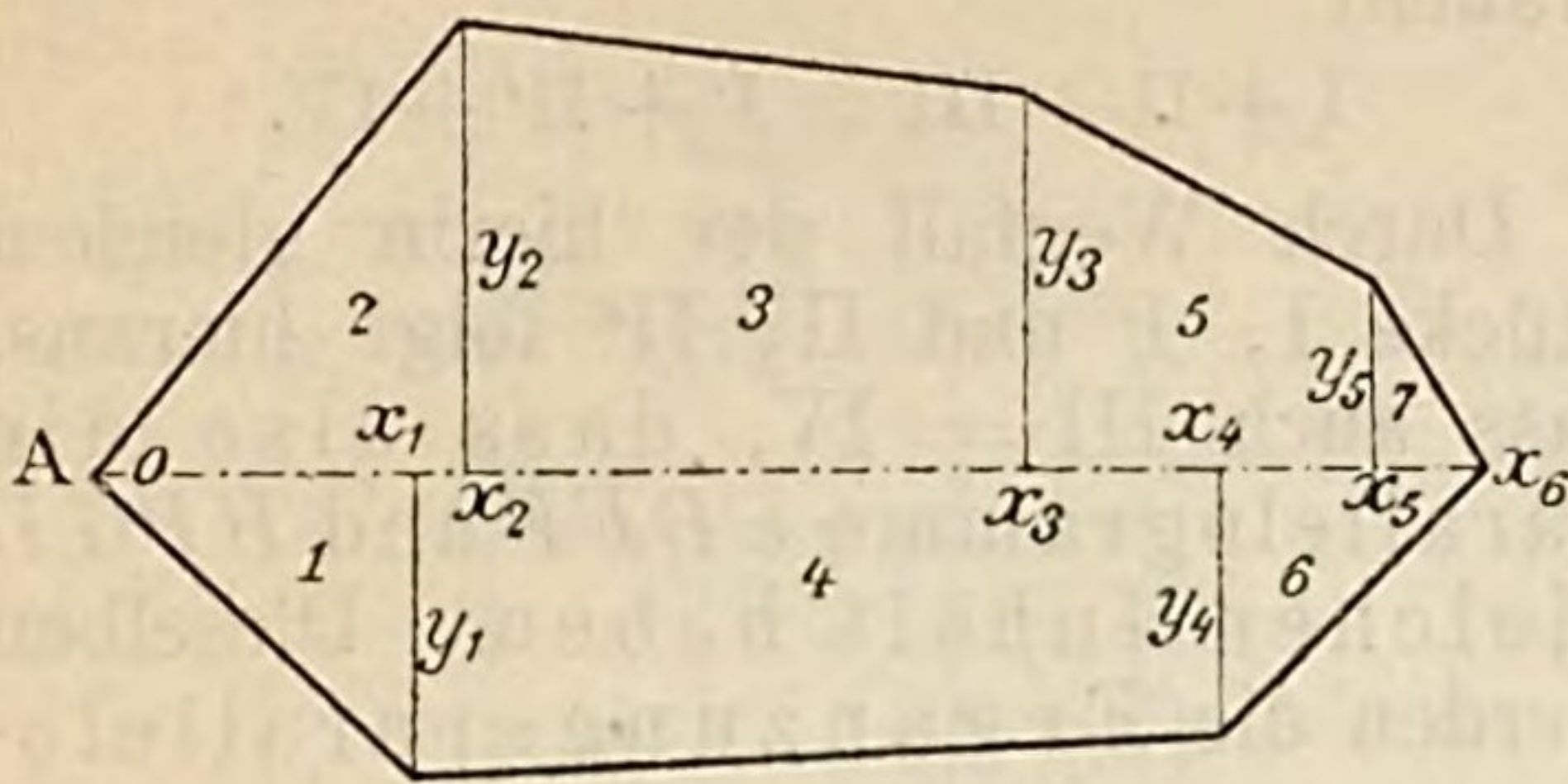
$$\frac{n \cdot a \cdot \varrho}{2}.$$

Und zwar gilt diese Formel unverändert nicht nur für einfache regelmässige Vielecke, sondern auch für die Sternvielecke, von deren Art in Figur 15 zweierlei 16-Ecke dargestellt sind.

Frage 24. Wie kann auch der Inhalt eines beliebigen Polygons praktisch ermittelt werden?

Antwort. Man kann den Inhalt eines Vielecks bestimmen, indem man eine (am besten die längste) Diagonale zieht, und von jeder Ecke auf dieselbe eine Senkrechte. Dadurch wird das Vieleck zerlegt in lauter rechtwinklige Teilfiguren, und zwar ein n -Eck in 4 Dreiecke und $n - 4$ Paralleltapeze. Bezeichnet man nun (siehe Figur 16) mit x die vom Anfangspunkte A ausgehenden Abstände auf der Diagonalen und mit y die Längen der aus

Figur 16.



Erkl. 55. Die im nebenstehenden angewendete Methode zur Ausmessung des Flächeninhaltes einer Figur kann auch dann Anwendung finden, wenn die Umgrenzung der gegebenen Fläche keine geradlinige ist. Wählt man dann auf dieser krummen Linie eine grosse Zahl von Punkten aus, und behandelt dieselben als Eckpunkte eines der krummen Linie eingeschriebenen Vielecks, so wird auf die angegebene Weise die Fläche dieses Vielecks genau bestimmt. Die zwischen Vieleck und Kurve liegenden Flächenstücke können dann entweder indirekt annäherungsweise ermittelt werden, oder man kann direkt deren Grösse dadurch unbegrenzt vermindern, dass man die Anzahl der gewählten Punkte immer stärker vermehrt. Dadurch wird man den Unterschied zwischen der geradlinigen und der krummlinigen Fläche allmählich so gering machen können, dass diese Fehlergrösse gegenüber der Gesamtgrösse und den gewählten Masseinheiten nicht mehr in Betracht kommt.

den Eckpunkten gefällten Senkrechten, so sind die y jeweils als Grundseiten und die x als Höhen der Trapeze bzw. Dreiecke anzusehen. Es sind nämlich in Figur 16 für

Dreieck 1: Grundseite y_1 , Höhe x_1 :

$$\text{Inhalt } \frac{1}{2} \cdot x_1 y_1;$$

Dreieck 2: Grundseite y_2 , Höhe x_2 :

$$\text{Inhalt } \frac{1}{2} \cdot x_2 y_2;$$

Trapez 3: Grundseiten y_2 u. y_3 , Höhe $(x_3 - x_2)$:

$$\text{Inhalt } \frac{1}{2} (x_3 - x_2) (y_2 + y_3);$$

Trapez 4: Grundseiten y_1 u. y_4 , Höhe $(x_4 - x_1)$:

$$\text{Inhalt } \frac{1}{2} (x_4 - x_1) (y_1 + y_4);$$

Trapez 5: Grundseiten y_3 u. y_5 , Höhe $(x_5 - x_3)$:

$$\text{Inhalt } \frac{1}{2} (x_5 - x_3) (y_3 + y_5);$$

Dreieck 6: Grundseite y_4 , Höhe $(x_6 - x_4)$:

$$\text{Inhalt } \frac{1}{2} (x_6 - x_4) y_4;$$

Dreieck 7: Grundseite y_5 , Höhe $(x_6 - x_5)$:

$$\text{Inhalt } \frac{1}{2} (x_6 - x_5) y_5.$$

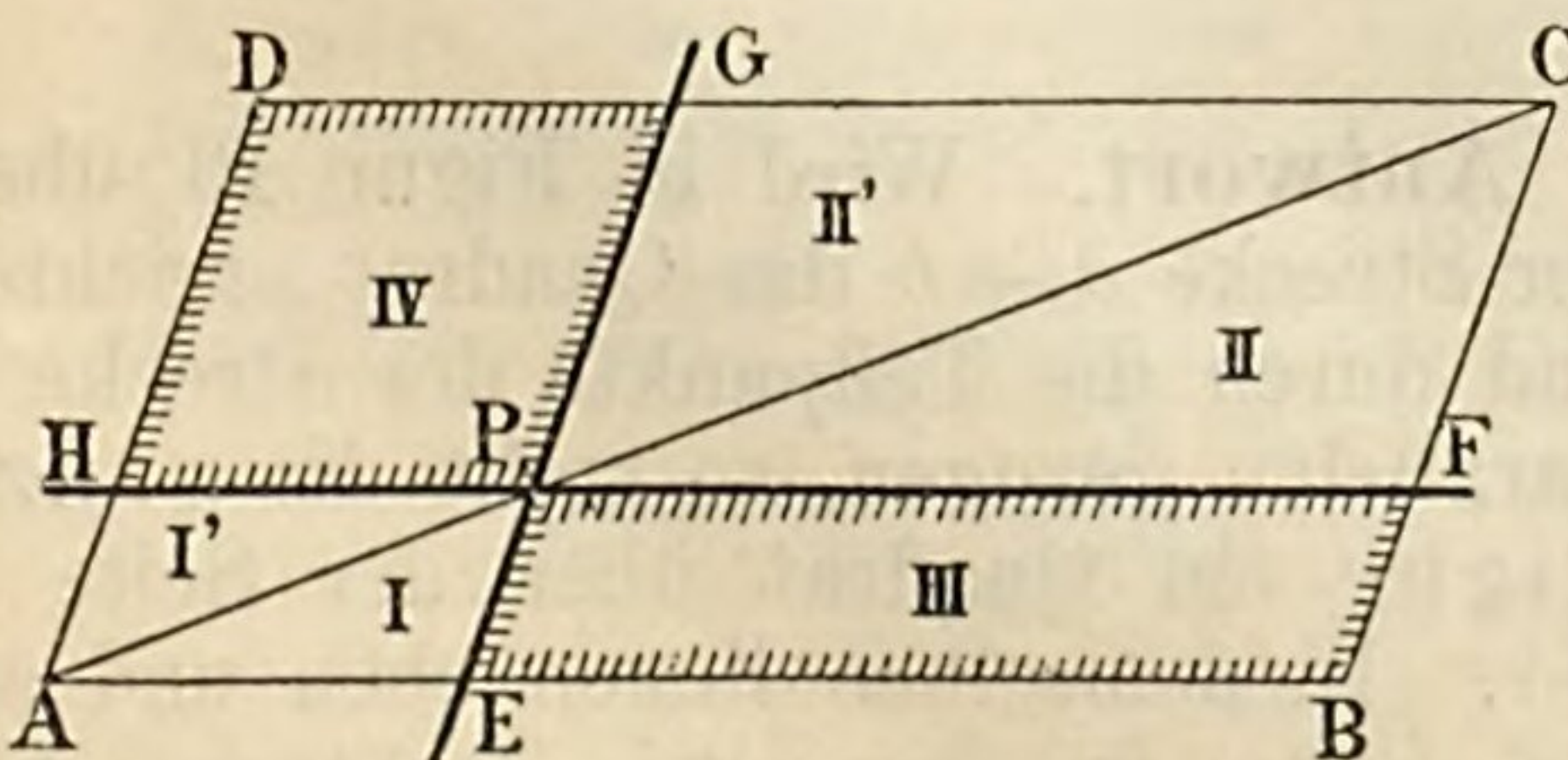
Also Gesamtinhalt unter Vorsetzung des gemeinsamen Faktors $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [x_1 y_1 + x_2 y_2 + (x_3 - x_2) (y_2 + y_3) + \\ & (x_4 - x_1) (y_1 + y_4) + (x_5 - x_3) (y_3 + y_5) + \\ & (x_6 - x_4) y_4 + (x_6 - x_5) y_5] \end{aligned}$$

3) Ueber besondere Fälle von Flächenbeziehungen.

Frage 25. Welche Teilfiguren entstehen, wenn man durch einen Punkt auf der Diagonale eines Parallelogramms zu dessen Seiten Parallele zieht?

Figur 17.



Antwort. Werden durch den Punkt P auf der Diagonale AC des Parallelogramms $ABCD$ in Figur 17 die Parallelen gezogen:

$$EG \parallel AD \parallel BC, \quad FH \parallel AB \parallel CD,$$

so entstehen vier Parallelogramme, nämlich:

$AEPH$, $PFCG$, III) $EBFP$, IV) $HPGD$.

Davon werden die beiden ersteren durch dieselbe Linie AC , welche Diagonale des grossen Parallelogramms ist, ebenfalls in zwei gleichgrosse Dreiecke

Erkl. 56. Die Ergänzungsp parallelogramme haben im allgemeinen Falle ungleiche Grundseiten und Höhen. Da aber die Winkel aller vier Parallelogramme entsprechend gleich sind, so sind auch die Ergänzungsp parallelogramme Rechtecke, wenn das Parallelogramm $ABCD$ ein Rechteck ist. Wird $ABCD$ Quadrat, so werden auch $AEPH$ und $PFCG$ Quadrate, folglich:

$$HP = EP, PF = PG:$$

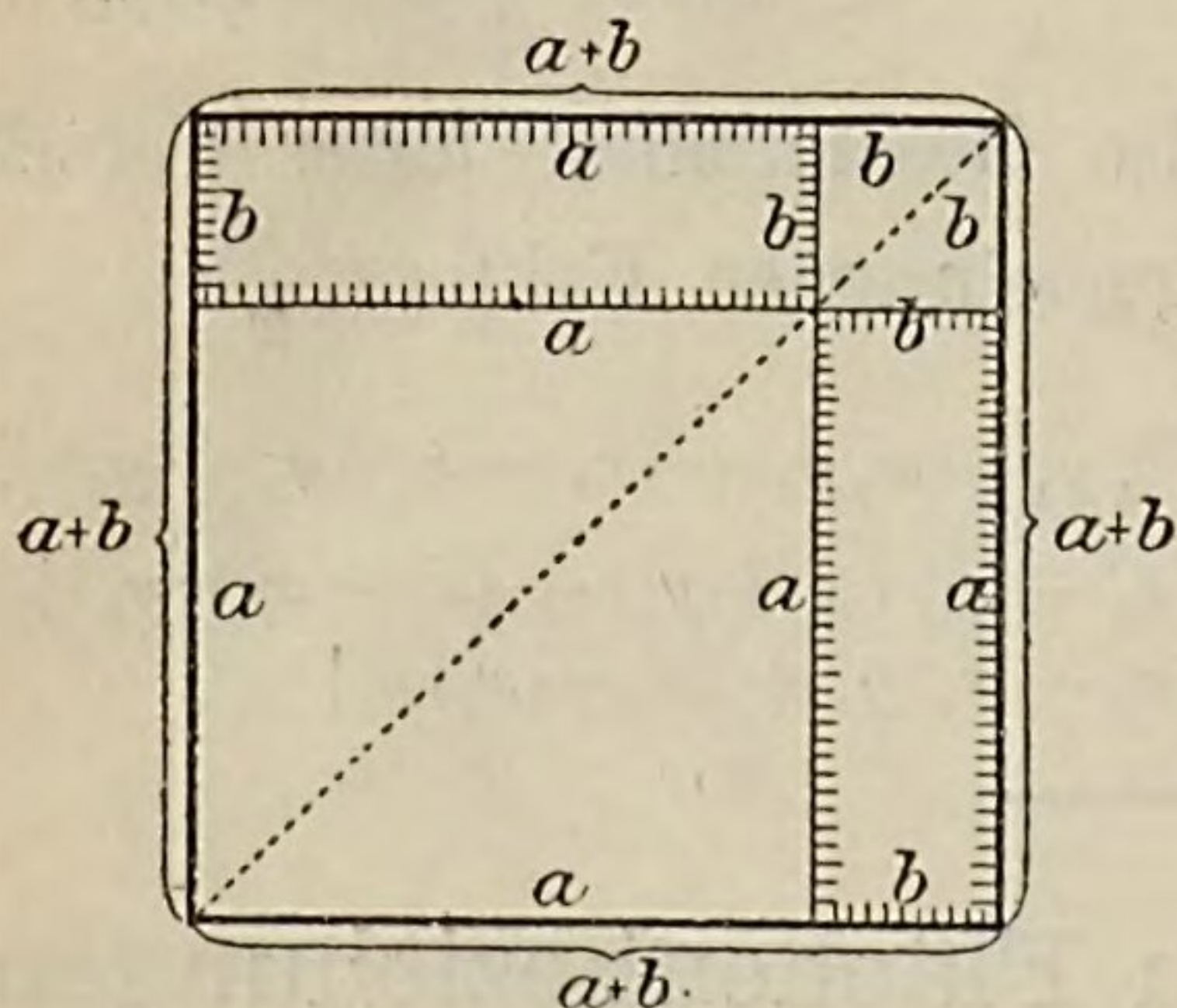
die Ergänzungsp parallelogramme werden kongruente Rechtecke. Die Kongruenz tritt im allgemeinen Falle nur dann ein, wenn der Punkt P in den Mittelpunkt der Diagonale AC fällt, wodurch alle vier Parallelogramme kongruent, jedes ein Viertel von $ABCD$ wird.

Erkl. 57. Wird zu einem der Parallelogramme $AEPH$ oder $PFCG$ einmal das eine, dann das andere der beiden Ergänzungsp parallelogramme zugefügt, so entstehen wieder inhaltsgleiche Parallelogramme:

$$ABFH = AEGD \text{ und } EBCG = HFCD.$$

Frage 26. Wie gross ist das Quadrat über der Summe zweier Strecken a und b ?

Figur 18.



Erkl. 58. Die beiden Rechtecke $a \cdot b$ sind die Ergänzungsp parallelogramme im Sinne der Antwort der vorigen Frage 25 und nach Erkl. 56 kongruente Rechtecke, denn die Diagonale des Quadrats a^2 ist auch Diagonale des Quadrats $(a+b)^2$.

Frage 27. Wie gross ist das Quadrat über der Differenz zweier Strecken a und b ?

Erkl. 59. Die Rechtecke $a \cdot b$ in Figur 18 liegen so nebeneinander, dass sie nur eine Ecke gemeinsam haben; in Figur 19 dagegen liegen dieselben aufeinander, so dass sie einen Winkel samt Stücken von den Schenkeln gemeinsam haben. Sie sind in Figur 18

geteilt, so dass (siehe Figur 17) $I = I'$, $II = II'$ und auch im grossen Parallelogramm:

$$I + II + III = I' + II' + IV.$$

Durch Wegfall der hierin gleichen Stücke I , I' und II , II' folgt hieraus, dass auch $III = IV$, dass also die Parallelogramme $EBFP$ und $HPGD$ gleichen Inhalt haben. Dieselben werden die Ergänzungsp parallelogramme genannt.

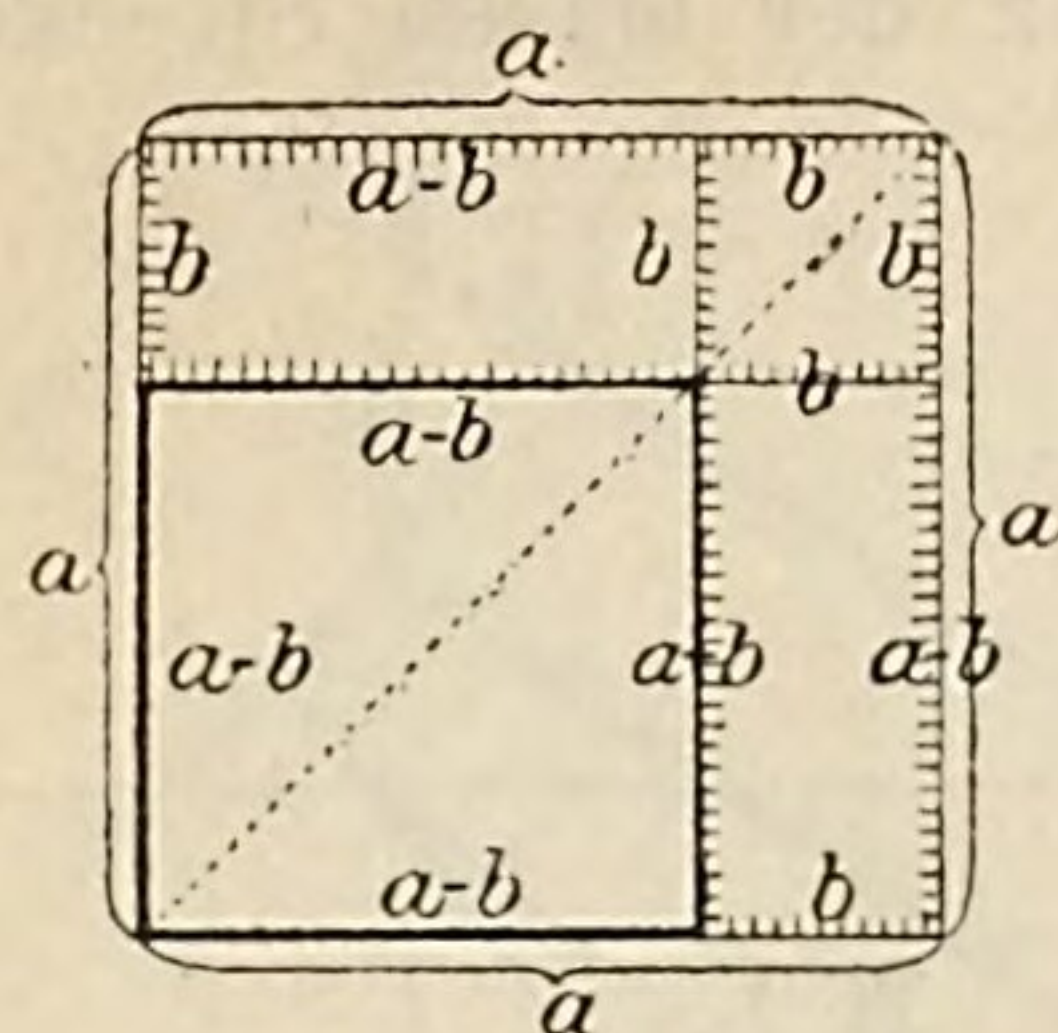
Antwort. Wird in Figur 18 über der Strecke $a+b$ das Quadrat errichtet und durch die Teilpunkte der Strecken $a+b$ Parallelen gezogen, so besteht das Quadrat über $a+b$ aus vier Rechtecken: in der einen Ecke ein Quadrat über a , in der Gegenecke ein ebensolches mit den Seiten b , und dazu beiderseits je ein Rechteck mit einer Seite a und einer Seite b . Also ist:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Antwort. Wird in Figur 19 über der Strecke $a-b$ das Quadrat errichtet und durch die Teilpunkte der Strecke a Parallelen gezogen, so stellt die ganze Figur ein Quadrat über der Seite a dar. In demselben liegen oben und an der Seite wieder zwei Rechtecke mit

Rechtecke der Art III oder IV in Figur 17, in Figur 19 dagegen wie die Rechtecke $EBCG = HFCD$ und nach Erkl. 57.

Figur 19.

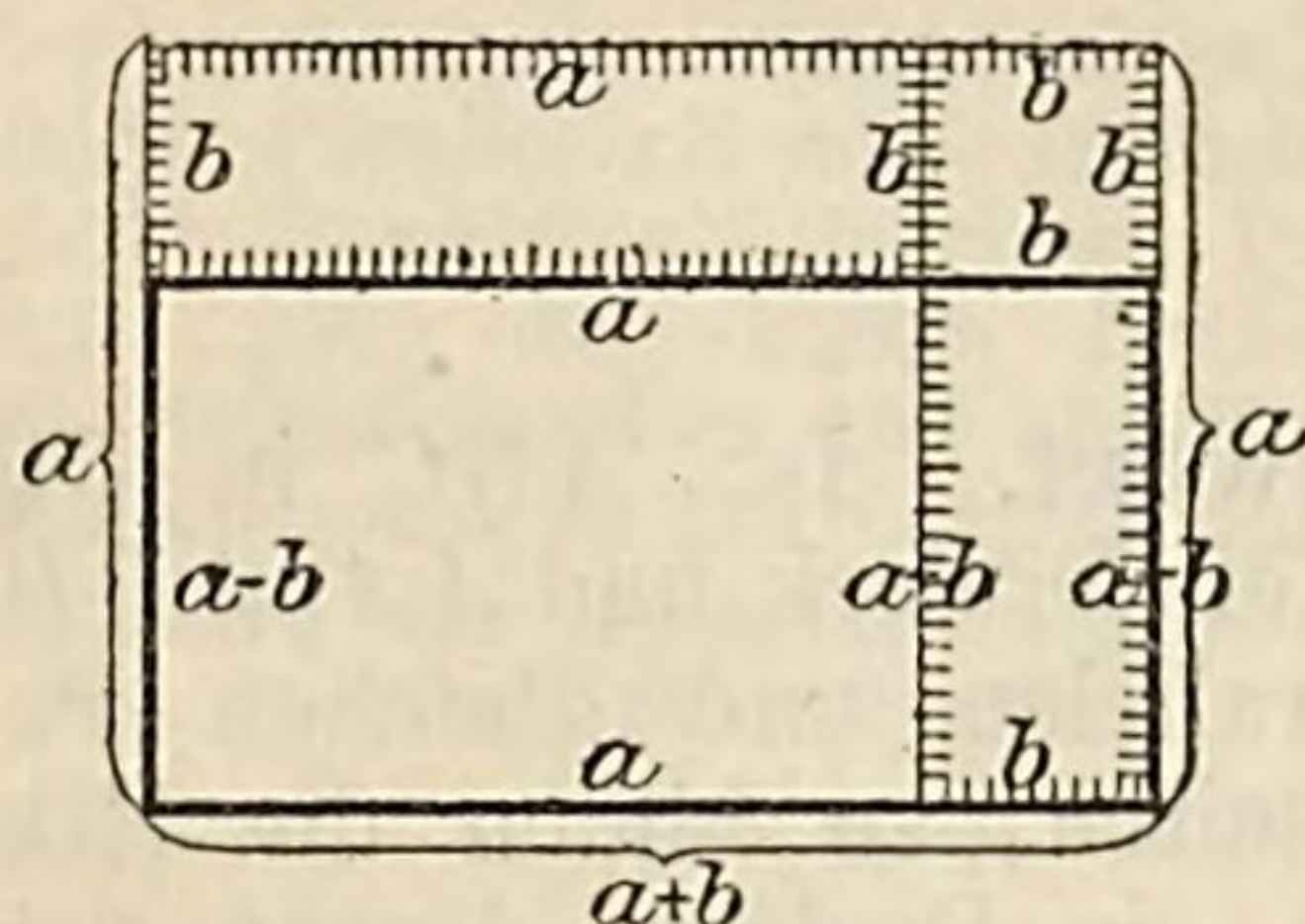


den Seiten a und b . Werden aber diese beiden Rechtecke vom ganzen Quadrat a^2 weggenommen, so ist das in der Ecke liegende Quadrat b^2 doppelt abgezogen, muss also wieder einmal hinzugefügt werden, um das Quadrat $(a-b)^2$ zu erhalten. Es ist also:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Frage 28. Wie gross ist das Rechteck aus Summe und Differenz zweier Strecken a und b ?

Figur 20.



Erkl. 60. Auf Figur 20 ist die Antwort der Frage 25 gar nicht anzuwenden, denn die Diagonale des Gesamtrechtecks $(a+b) \cdot a$ geht nicht durch die Gegenecke des Rechtecks $a(a-b)$. Auch sind die Rechtecke links oben $a \cdot b$, rechts unten $(a-b)b$ nicht einander gleich.

Antwort. Wird in Figur 20 aus den Strecken $a+b$ und $a-b$ ein Rechteck errichtet, und durch die Teilpunkte der Strecken Parallelen gezogen, so besteht die ganze Figur aus einem Quadrate a^2 und einem an dessen rechter Seite angelegten Rechtecke $a \cdot b$ oder zusammen $a^2 + a \cdot b$. Um das Rechteck $(a+b)(a-b)$ übrig zu behalten, muss davon weggenommen werden der ganze obere Querstreifen, nämlich das Rechteck $a \cdot b$ und das daneben liegende Quadrat b^2 . Also ist:

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Frage 29. Welche Aussagen ergeben sich aus der Antwort der vorigen drei Fragen?

Erkl. 61. In algebraischer Ausdrucksweise lauten die beiden nebenstehenden Sätze folgendermassen:

Die zweite Potenz eines Binoms (Polynoms) ist gleich der Summe der zweiten Potenzen beider (aller) Glieder, vermehrt um das doppelte Produkt der beiden (je zweier) Glieder:

$$\begin{aligned} (a \pm b \pm c \pm d + \dots)^2 = & \\ & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots \\ & \pm 2ab \pm 2ac \pm 2ad \pm \dots \\ & \pm 2bc \pm 2bd \pm \dots \\ & \pm 2cd \pm \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

Antwort. Auf Grund der Antwort der drei vorigen Fragen kann man folgende Aussagen machen:

Satz 9. Das Quadrat über der Summe (oder Differenz) zweier Strecken ist gleich der Summe der Quadrate beider Strecken, vermehrt (oder vermindert) um das doppelte Rechteck beider Strecken:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Satz 9a. Das Rechteck aus Summe und Differenz zweier Strecken ist gleich der Differenz der Quadrate beider Strecken:

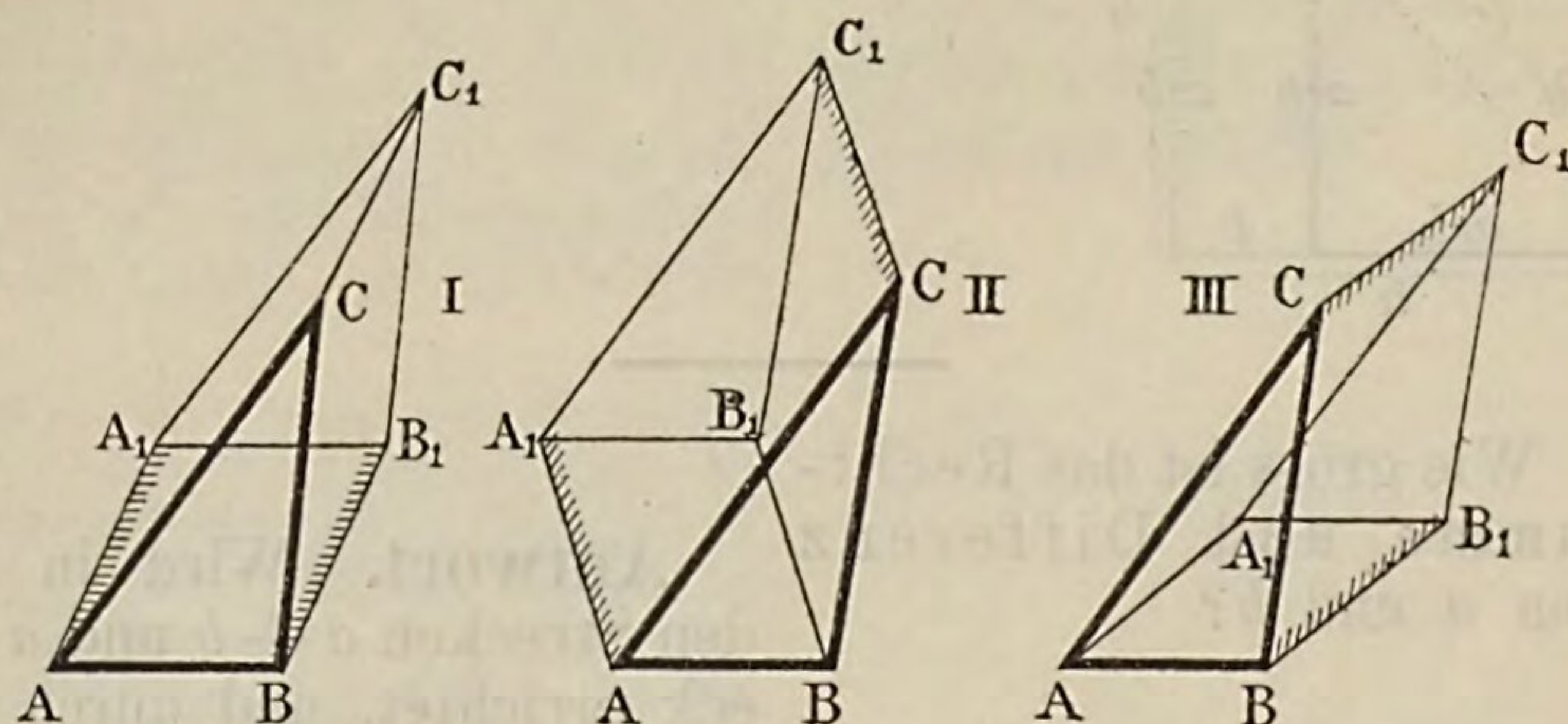
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Das Produkt aus Summe und Differenz derselben Grössen ist gleich der Differenz der zweiten Potenzen derselben Grössen. — Die Differenz der zweiten Potenzen zweier Grössen ist gleich dem Produkt aus Summe und Differenz derselben Grössen.

Und umgekehrt:

Die Differenz der Quadrate zweier Strecken ist darstellbar als Rechteck aus Summe und Differenz der beiden Strecken.

Figur 21.



Frage 30. Was für Flächen entstehen, wenn man über den drei Seiten eines Dreiecks Parallelogramme mit parallelen und gleichen Seiten errichtet?

Erkl. 62. Man erkennt leicht den Zusammenhang und Uebergang zwischen den drei Fällen I, II, III der Figur 21. Es ist jedesmal dasselbe Dreieck zu Grunde gelegt und nur die Richtung der Parallelogrammseiten verändert. Dieselbe geht in I bei C durch den Innen- bzw. Scheitelwinkel, in II bei B durch den Innenwinkel, in III bei A durch den Innenwinkel. Und es ist bei

I II III
 ABA_1B_1 ACA_1C_1 BCB_1C_1

dasjenige Parallelogramm, welches gleich der Summe der beiden andern ist. (Die Seiten desselben sind in der Figur durch Schattierung angegeben, es sind jeweils diejenigen beiden von den drei Parallelen, welche die Gegenecke des Dreiecks zwischen sich fassen.) Es ist also jeweils dasjenige Parallelogramm das grösste und gleich der Summe der beiden andern, dessen Seiten die Gegenecke zwischen sich haben, oder an dessen Gegenecke die Seitenrichtung durch den Dreieckswinkel geht.

Erkl. 63. Man kann das Ergebnis der nebenstehenden Antwort auch so aussprechen:

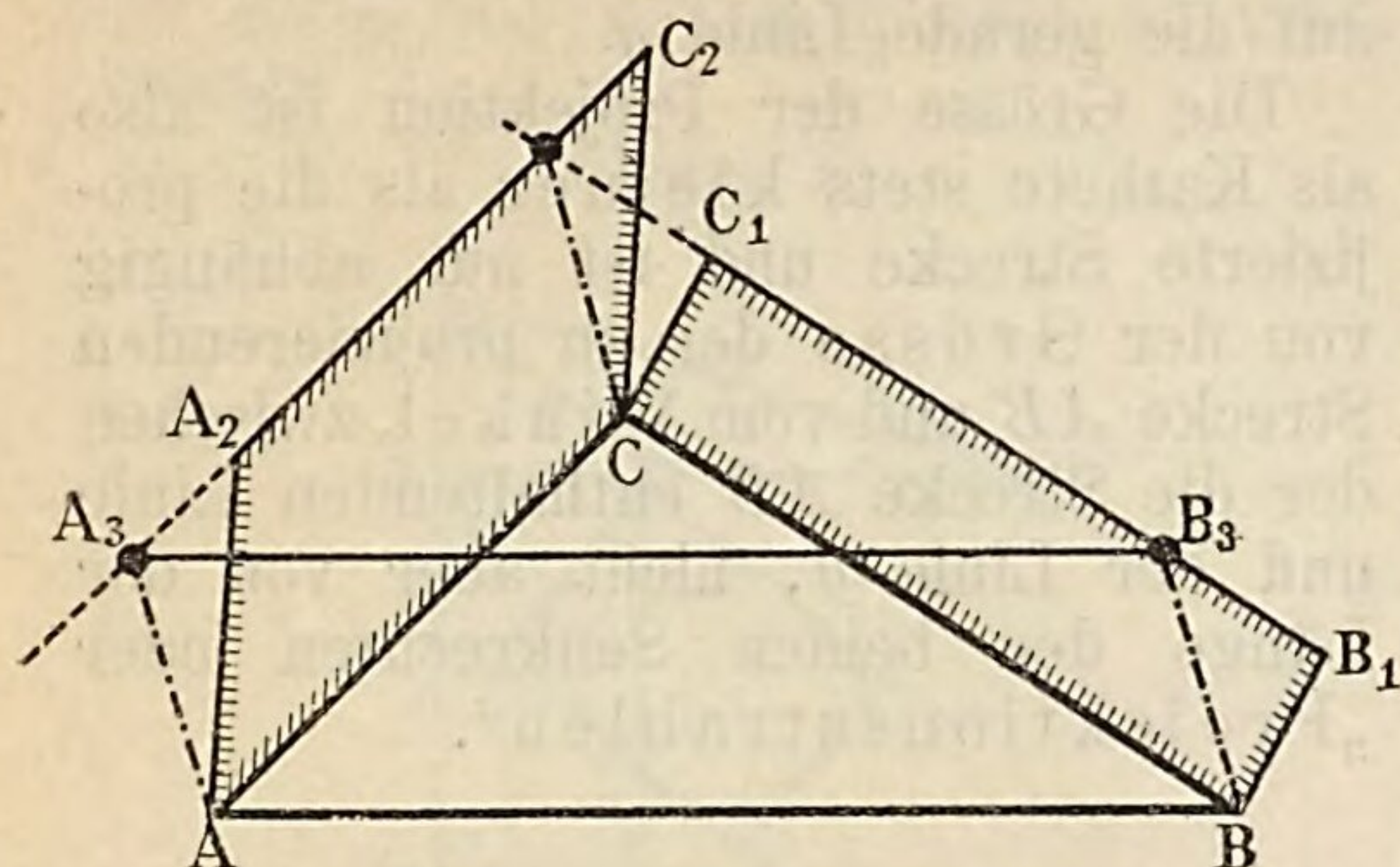
Wird ein Dreieck längs einer Geraden verschoben, so ist die von einer seiner Seiten beschriebene Fläche gleich der Summe der beiden andern.

Antwort. Ist ABC in Figur 21 jeweils ein Dreieck, und $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ die parallelen und gleichen Parallelogrammseiten, so bilden die Eckpunkte $A_1B_1C_1$ ein Dreieck, dessen Seiten als Gegenseiten der Parallelogramme den drei Seiten des Dreiecks ABC gleich sind. Folglich ist $ABC \cong A_1B_1C_1$, und man erhält dieselben Flächen, wenn man von der Gesamtfigur entweder das Dreieck ABC oder das Dreieck $A_1B_1C_1$ abzieht. Die Gesamtfigur ist also jedesmal ein Fünfeck, da eine der sechs Ecken $ABC A_1B_1C_1$ im Innern liegt. Das Parallelogramm über der dieser Ecke gegenüberliegenden Dreiecksseite entsteht nun durch Wegnahme des einen der beiden Dreiecke, durch Wegnahme des andern aber die Summe der beiden andern Parallelogramme.

Also ist das Parallelogramm über einer der drei Dreiecksseiten gleich der Summe der Parallelogramme über den beiden andern Seiten.

Frage 31. Welche Verallgemeinerung lässt die vorige Antwort noch zu?

Figur 22.



Erkl. 64. Der nebenstehende Satz wurde bereits von einem Mathematiker des Altertums mit Namen Pappus (um 400 nach Chr. in Alexandria) aufgestellt und zwar in der umgekehrten Ausdrucksweise:

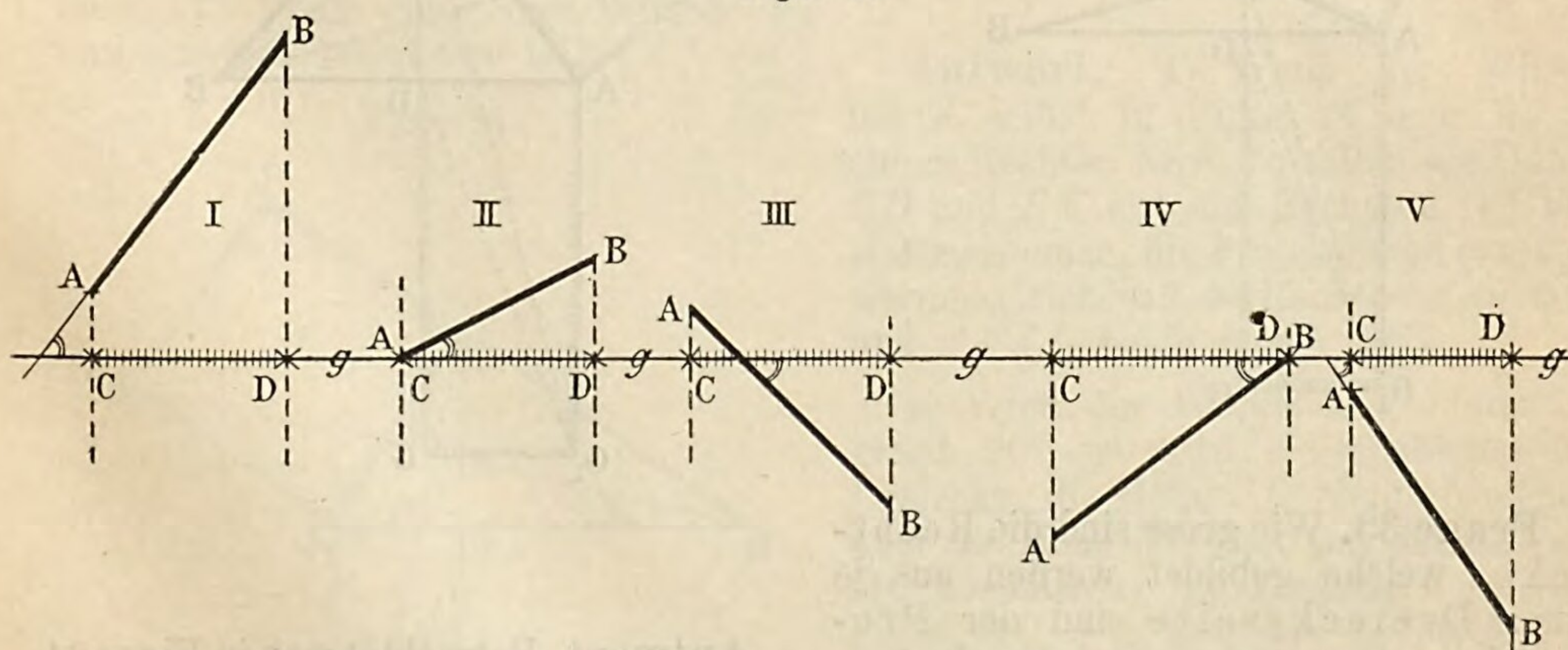
Werden über zwei Seiten eines Dreiecks beliebige Parallelogramme gezeichnet, so ist deren Summe gleich einem Parallelogramme über der dritten Dreiecksseite, dessen Seiten parallel und gleich sind der Verbindungsstrecke des Schnittpunktes der Gegenseiten der ersteren Parallelogramme mit dem dritten Dreieckspunkte:

$$AB A_3 B_3 = AC A_2 C_2 + BC B_1 C_1.$$

Antwort. Da die Fläche eines Parallelogramms gleichgross bleibt, wenn seine Gegenseite in ihrer Linie verschoben wird, so kann man bei den beiden kleineren Parallelogrammen der Figur 21 jeweils die Gegenseiten ebenfalls auf der durch den Schnittpunkt gehenden Linie verschieben, ohne die Gültigkeit des vorigen Satzes aufzuheben. Man kann daher die Aussage machen:

Satz 10. Ein Parallelogramm über einer Dreiecksseite, deren Gegenecke zwischen die Parallelogrammseiten fällt, ist gleich der Summe irgend zweier Parallelogramme über den beiden andern Dreiecksseiten, deren Gegenseiten durch die Ecken des ersten Parallelogramms gehen.

Figur 23.



Frage 32. Was versteht man unter Projektion einer Strecke AB auf eine Linie g?

Erkl. 65. In Figur 23 sind die verschiedenen Lagen einer Strecke gegen eine Linie g dargestellt, auf welche die Strecke projiziert werden soll. Die Endpunkte AB können beider-

Antwort. Um die Projektion einer Strecke AB auf eine Linie g zu erhalten, fällt man von den Endpunkten A und B der Strecke AB senkrechte Linien auf die Gerade g. Dann heisst Projektion

seits ausserhalb g oder auch auf g selbst liegen. Im letzteren Falle ist nur eine Senkrechte erforderlich, da ein Endpunkt der Strecke und der Projektion zusammenfallen. Würden beide Punkte A und B auf g liegen, so fällt die Strecke AB mit ihrer Projektion CD vollständig zusammen.

Erkl. 66. Aus derselben Figur 23 ist ferner zu erkennen, dass in den Fällen I bis III dieselbe Grösse der Projektion entstehen kann, wenn ungleiche Strecken projiziert werden, nämlich grosse Strecken mit grossem, kleinere mit kleinerem Winkel gegen g .

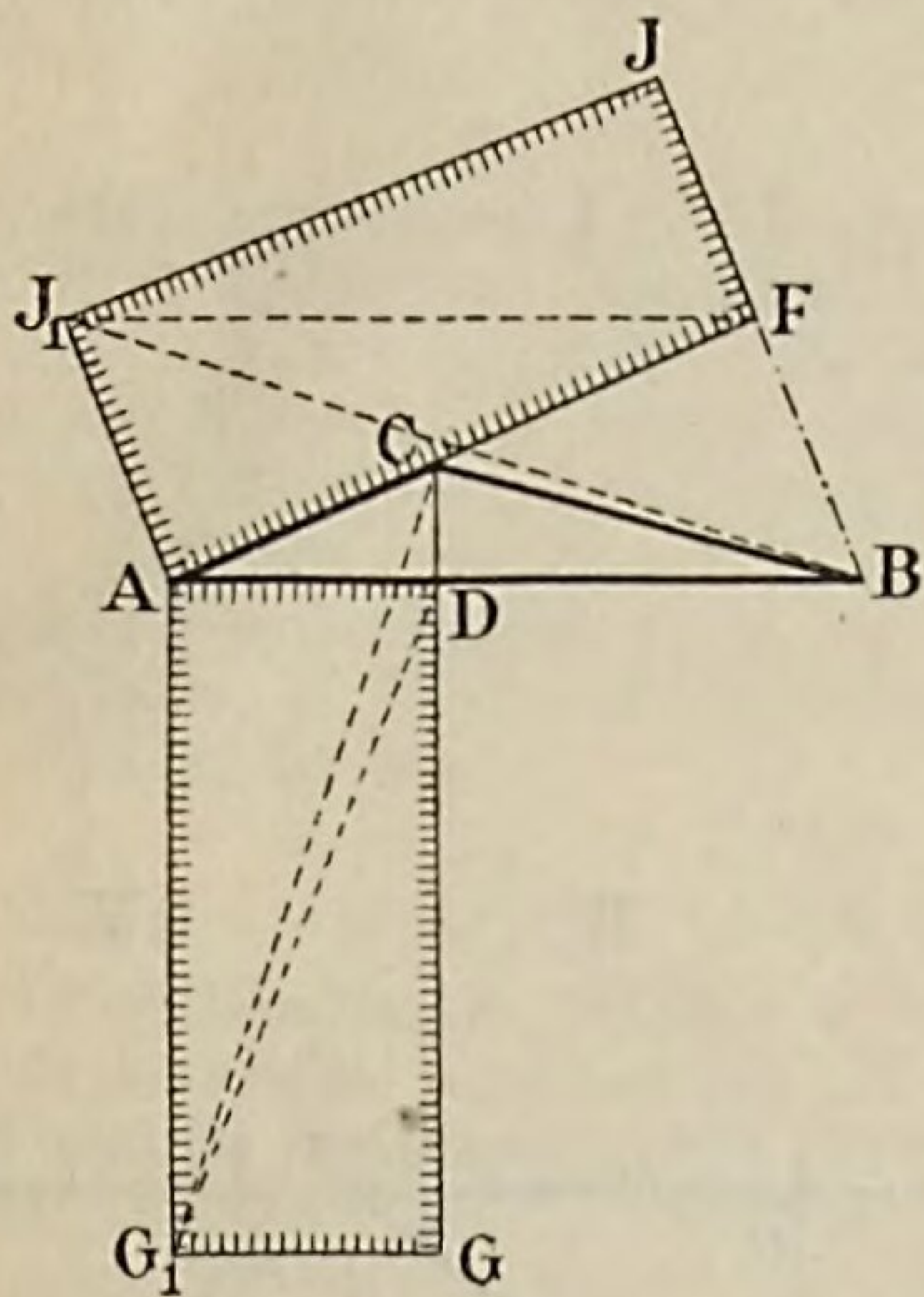
Dagegen zeigen die Fälle IV und V, dass wenn dieselbe Strecke AB erst unter einem kleinen Winkel, dann unter grösserem Winkel projiziert wird, erst eine grössere, dann eine kleinere Projektion entsteht. Immer aber ist die Projektion kleiner als die projizierte Strecke.

Erkl. 67. Ueber die Anwendung des Begriffes der Projektionen auf die Seiten, bzw. Höhen und Höhenabschnitte des Dreiecks vergleiche man Erkl. 146 und Antwort der Frage 84 im III. Teile dieses Lehrbuches.

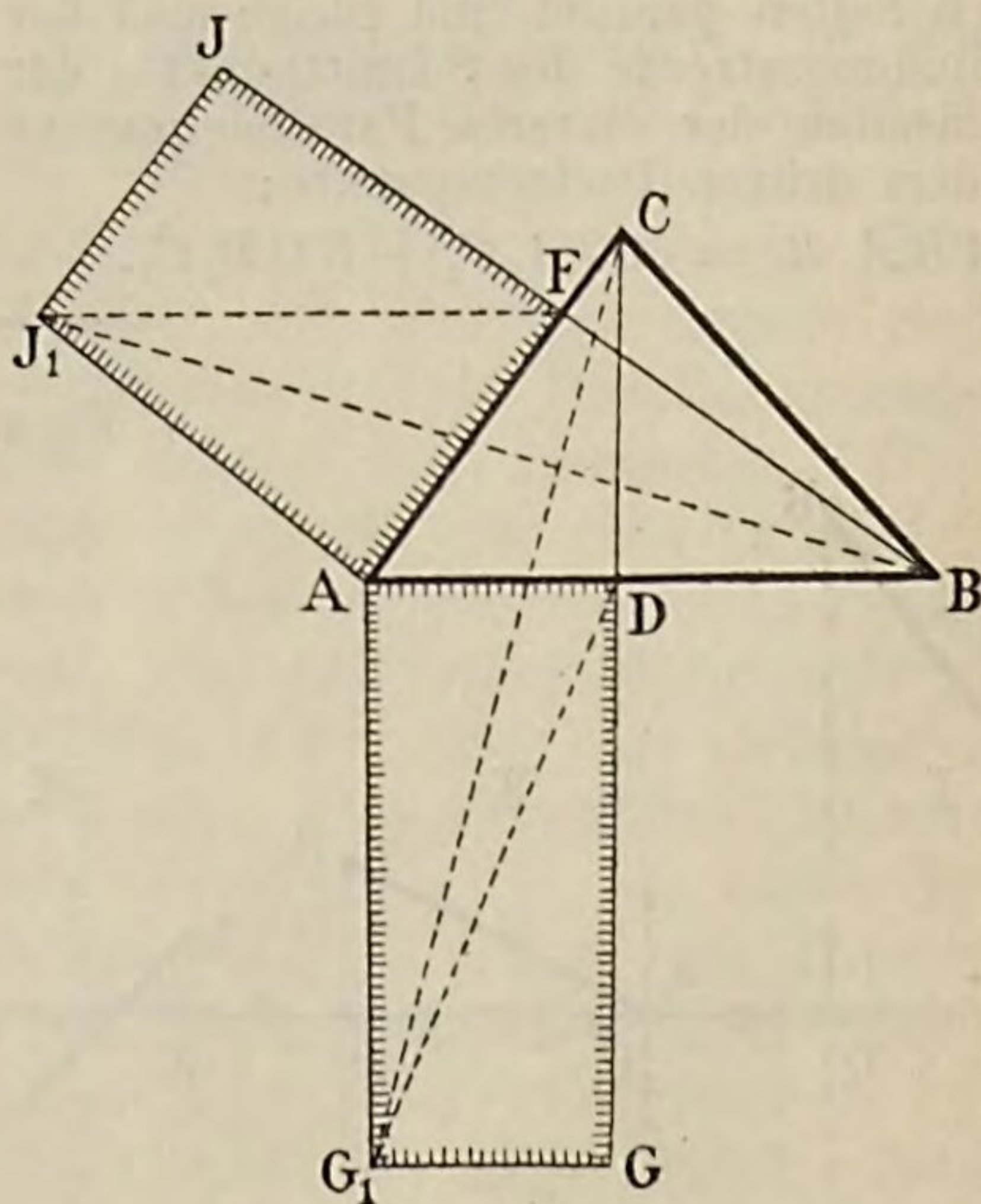
der Strecke AB auf die Linie g die Strecke auf g zwischen den Fusspunkten der Senkrechten von den Endpunkten der Strecke AB auf die gerade Linie g .

Die Grösse der Projektion ist also als Kathete stets kleiner als die projizierte Strecke und ist nur abhängig von der Grösse der zu projizierenden Strecke AB und vom Winkel zwischen der die Strecke AB enthaltenden Linie und der Linie g , nicht aber von der Länge der beiden Senkrechten oder „Projektionsstrahlen“.

Figur 24a.



Figur 24b.



Frage 33. Wie gross sind die Rechtecke, welche gebildet werden aus je einer Dreiecksseite und der Projektion einer andern auf dieselbe?

Erkl. 68. In den Figuren 24 und 25 sind die beiden Fälle durchgeführt, dass der Winkel bei A erst ein spitzer, dann ein stumpfer ist. Der nebenstehende Beweis bleibt für beide Figuren bis ins einzelste völlig derselbe. Der Unterschied in der Figur liegt nur darin, dass die Projektionsstrecken $AD = q_c$ und $AF = p_b$

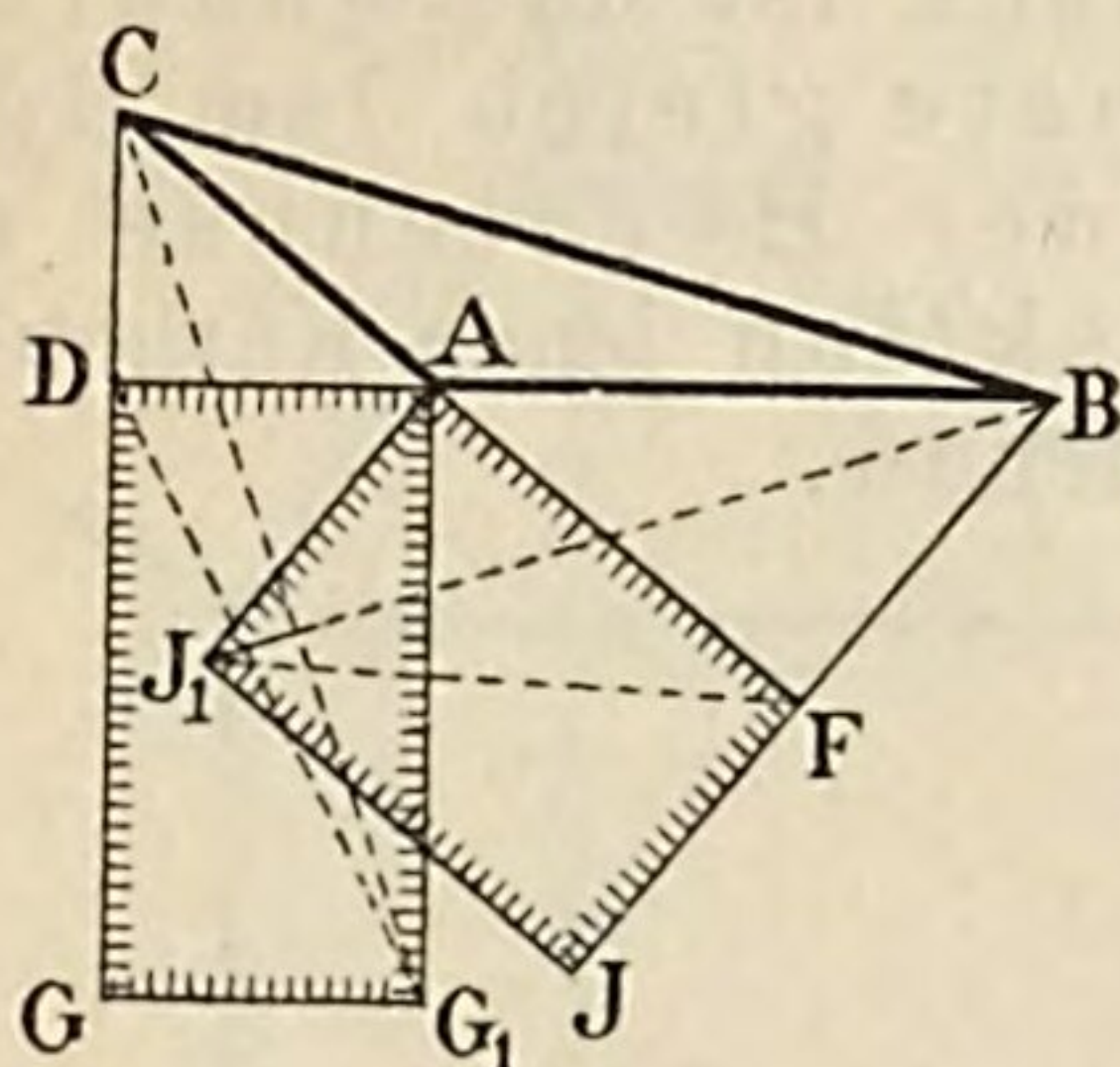
Antwort. Betrachtet man in Figur 24 und 25 die Seiten b und c , so ist $AD = q_c$ die Projektion von b auf c , $AF = p_b$ die Projektion von c auf b . Es ist also, wenn $AG_1 = DG = c$ und $AJ_1 = FJ = AC = b$,

$$\text{Rechteck } ADGG_1 = AD \cdot AG_1 = c \cdot q_c,$$

$$\text{Rechteck } AFJJ_1 = AF \cdot AJ_1 = b \cdot p_b.$$

einmal auf die Strecken AB und AC selbst, das andere Mal auf deren Verlängerung fallen. Dadurch wird aber nur bewirkt, dass auch die Rechtecke aus Seite und Projektion einmal in die Quadrate a^2 und c^2 selbst hineinfallen, das andere Mal neben dieselben zu liegen kommen.

Figur 25.



Erkl. 69. In Figur 35 und 36 sind nicht nur die Rechtecke aus den Seiten b und c und deren beiderseitige Projektionen gezeichnet, sondern auch die der zwei andern Seitenpaare: a und c , bzw. a und b . Es ist also nach nebenstehendem Satze sowohl in Figur 35 als 36:

- 1) $ADGG_1 = AFJJ_1$, d. h. $c \cdot q_c = b \cdot p_b$.
- 2) $BEHH_2 = BDGG_2$, d. h. $a \cdot q_a = c \cdot p_c$.
- 3) $CFJJ_3 = CEHH_3$, d. h. $b \cdot q_b = a \cdot p_a$.

Darin ist nun:

- 1) Rechteck $ADGG_1 = 2 \cdot \triangle AG_1D$ (mit Grundseite AG_1 , Spitze D).
- 2) $\triangle AG_1D = \triangle AG_1C$ (denn es hat gleiche Grundseite AG_1 , und die Spitze auf deren Parallelen $GDC \parallel AG_1$ verschoben von D nach C).
- 3) $\triangle AG_1C \cong \triangle ABJ_1$, (Grundseite AJ_1 , Spitze B ; denn wenn AG_1C um den Punkt A um einen rechten Winkel gedreht wird, so gelangt G_1 nach B , C nach J_1 , also:
 AG_1 nach AB ,
 AC nach AJ_1 ,
 G_1C nach BJ_1).
- 4) $\triangle ABJ_1 = \triangle AFJ_1$, (denn es hat gleiche Grundseite AJ_1 und die Spitze auf deren Parallelen $BFJ \parallel AJ_1$ von B nach F verschoben).
- 5) $2 \cdot \triangle AFJ_1 = \text{Rechteck } AFJJ_1$.

Folglich ist:

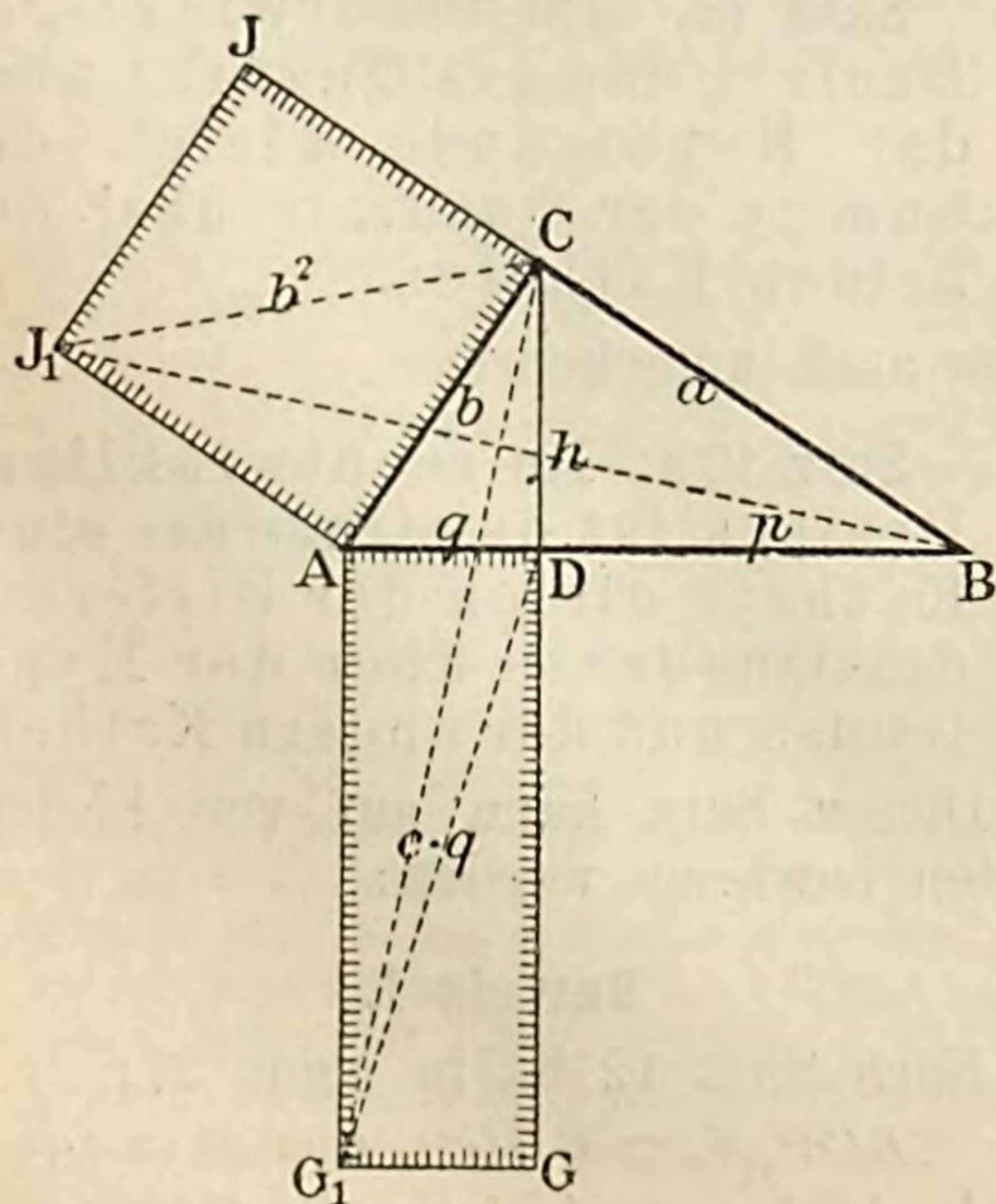
$$ADGG_1 = AFJJ_1 \text{ oder } c \cdot q_c = b \cdot p_b.$$

Man erhält also die Aussage:

Satz 11. Das Rechteck aus einer Dreiecksseite und der Projektion einer andern auf dieselbe ist gleich dem Rechteck aus dieser andern Seite und der Projektion der ersteren Seite auf dieselbe.

Frage 33 a. Wie lautet der vorige Satz 11, wenn einer der Winkel des Dreiecks ein Rechter ist?

Figur 26.



Antwort. 1) Wenn der Winkel bei A selbst in Figur 24 oder 25 zu einem Rechten wird, so fallen die Höhen CD und BF mit den Katheten CA und BA zusammen, die Projektionen q_c und p_b werden gleich Null, die Rechtecke $ADGG_1$ und $AFJJ_1$ beide gleich Null.

2) Wird der Winkel bei C (oder B) gleich 90° , so wird c Hypotenuse des Dreiecks, die Höhe CD bleibt bestehen, aber die Höhe BF fällt mit der Kathete BC zusammen, die Projektion p_b wird gleich $AC = b$, also das Rechteck $b \cdot p_b$ zum Quadrat b^2 . Man erhält daher genau wie im vorigen Beweise (s. Fig. 26):

$$\begin{aligned} \text{Rechteck } ADGG_1 &= AD \cdot AG_1 = c \cdot q_c, \\ \text{Quadrat } ACJJ_1 &= b \cdot p_b = b^2. \end{aligned}$$

Dann:

$$\begin{aligned} ADGG_1 &= 2 \cdot \triangle AG_1D = 2 \cdot \triangle AG_1C \\ &= 2 \cdot \triangle ABJ_1 = 2 \cdot \triangle ACJ_1 = ACJJ_1. \end{aligned}$$

Erkl. 70. Ebenso wie im nebenstehenden Beweise gezeigt wird, dass $b^2 = c \cdot q$ ist, wird auch bewiesen, dass $a^2 = c \cdot p$, indem (Buchstabenbezeichnung in Figur 27):

$$\begin{aligned} c \cdot p &= BD \cdot BA = \text{Rechteck } BDG G_2 \\ &= 2 \cdot \triangle BG_2 D = 2 \cdot \triangle BG_2 C \\ &= 2 \cdot \triangle BAH_2 = 2 \cdot \triangle BCH_2 \\ &= \text{Quadrat } BCH_3 H_2 = BC \cdot BC = b^2. \end{aligned}$$

Die Bezeichnung der Höhe h und der Projektionen p_c und q_c durch den Index c ist beim rechtwinkligen Dreieck nicht mehr erforderlich, da die Höhen h_a und h_b , sowie die Projektionen p_a oder p_b , q_a , q_b nicht mehr erscheinen, weil $p_a = q_b = 0$, $h_a = p_b = b$, $h_b = q_a = a$.

Erkl. 71. Der nebenstehende Satz kann auch in folgendem Wortlaut ausgesprochen werden:

Satz. Wenn man in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse durch die Höhe teilt, so ist das Quadrat einer Kathete gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem jener Kathete anliegenden Abschnitt derselben.

Andere Beweise desselben Satzes findet man im Abschnitt III u. IV der Antwort der Frage 34.

Satz 11 gilt also erstens für die beiden zu Null gewordenen Rechtecke am Scheitel des rechten Winkels; und für die beiden andern Seitenpaare nimmt derselbe folgende Gestalt an:

Satz 12. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathete gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der Projektion jener Kathete auf die Hypotenuse.

4) Ueber den pythagoreischen Lehrsatz und seine Folgerungen.

Frage 34. Wie lautet der „pythagoreische Lehrsatz“ und wie ist derselbe zu beweisen?

Erkl. 72. Der Philosoph Pythagoras von Samos war ein Mathematiker im sechsten Jahrhundert (540) vor Christus. Von ihm geht die Anekdote, dass er nach Auffindung dieses Satzes gerufen habe: „εὕρηκα“, d. h. „ich hab's gefunden“, und dass er den Göttern grosse Dankopfer dafür geschlachtet habe. Nach seinem Namen ist der Satz benannt geblieben als pythagoreischer (nicht pythagoräischer), vom griech. *πυθαγόρειος* (nicht *πυθαγοραῖος*).

(Siehe Klimpert, Geschichte der Mathematik.)

Erkl. 73. Nebestehender erster Beweis auf Grund des Satzes 12 ist der von dem Mathematiker Euklid um 300 vor Christus gegebene Beweis. Derselbe macht bloss Gebrauch von der Verschiebbarkeit der Dreiecksspitze parallel zur Grundseite bei gleichbleibendem Inhalte, und ist insofern der elementarste und natürlichste.

Antwort. Der „Lehrsatz des Pythagoras“ oder der pythagoreische Lehrsatz lautet:

Satz 13. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Also auch umgekehrt:

Satz 13a. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathete gleich der Differenz der Quadrate über der Hypotenuse und der andern Kathete.

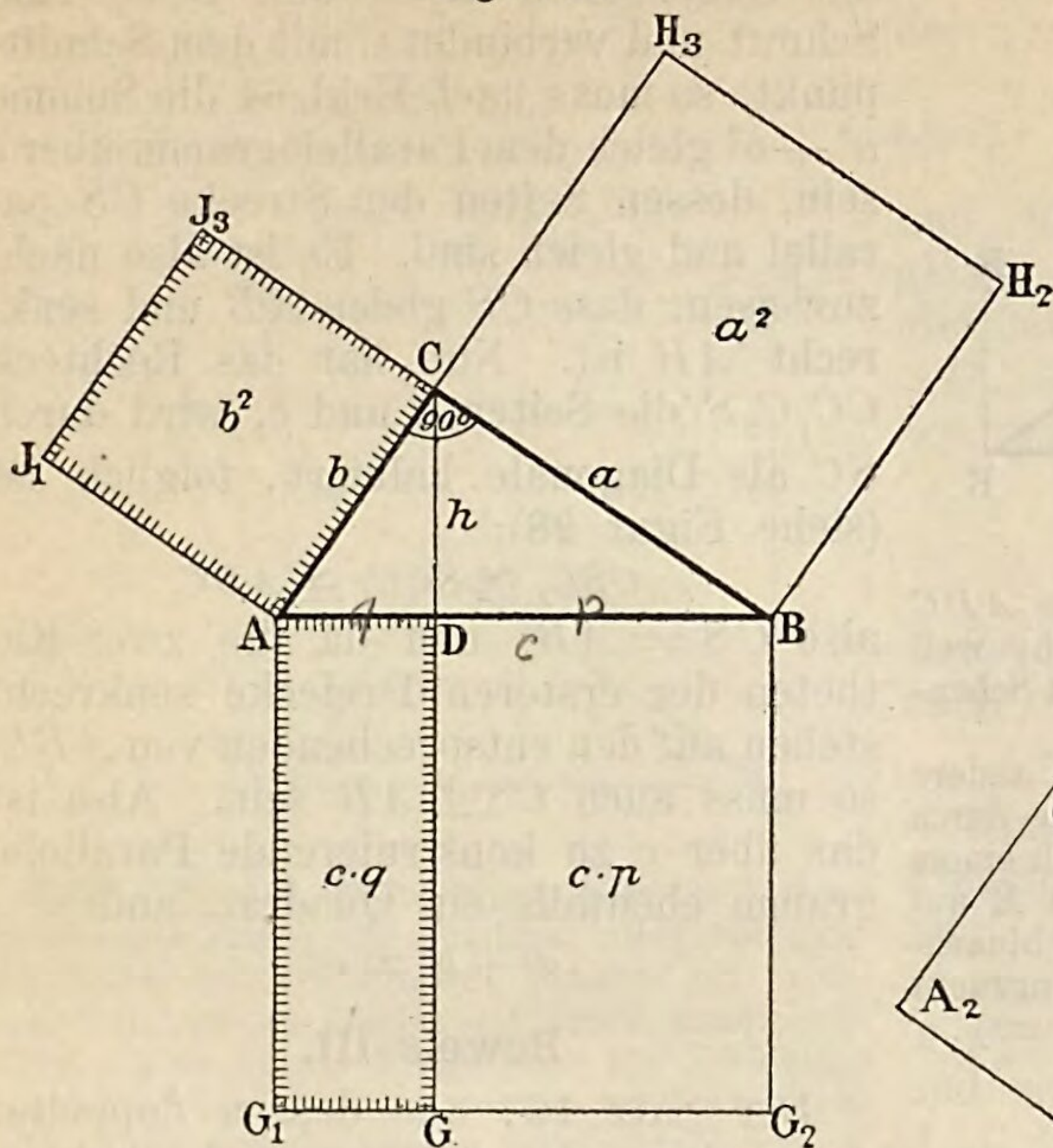
Dieser Satz kann auf verschiedene Arten bewiesen werden:

Beweis I.

Nach Satz 12 ist in Figur 27:

$$\begin{aligned} BCH_3 H_2 &= BDG G_2 \text{ oder } a^2 = c \cdot p \\ \text{und } ACJ_3 J_1 &= ADG G_1 \text{ oder } b^2 = c \cdot q. \end{aligned}$$

Figur 27.



Erkl. 74. Dass in Figur 28 die Dreiecke $ABC \cong AA_3A_2 \cong B_3BB_1$ sind, kann durch Drehung des Dreiecks ABC um 90° um den Punkt A bzw. um den Punkt B gezeigt werden. Denn es decken sich $AB = AA_3$ nach Richtung und Grösse, AC nach Richtung mit AA_2 und als Senkrechte hierzu BC nach Richtung mit A_3A_2 , folglich die ganzen Dreiecke.

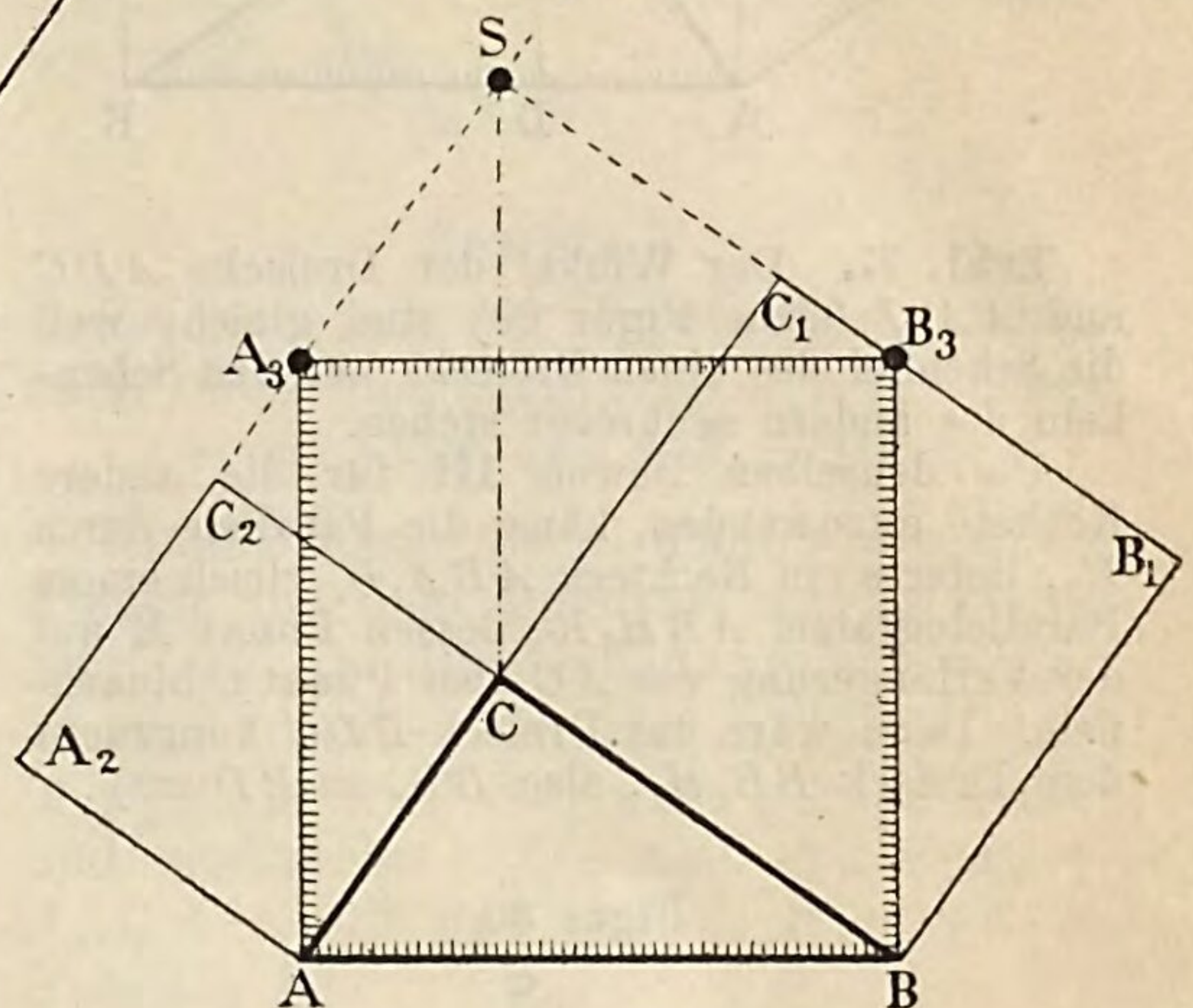
Man kann aber auch unmittelbar Kongruenz nachweisen wie folgt: $BA = BB_3$, und wegen senkrechter Schenkel sind sämtliche Winkel gleich, also Kongruenz nach dem IV. Kongruenzsatze wegen Uebereinstimmung einer Seite und der drei Winkel.

Erkl. 75. Während für den ersten der beiden nebenstehenden Beweise das Quadrat der Hypotenuse notwendig nach oben gezeichnet werden muss, ist dies beim zweiten nicht erforderlich. Dieser gilt auch, wenn man die Kathetenquadrate beide einwärts zeichnet.

Erkl. 76. Aus den beiden Beweisarten ist insbesondere auch als bemerkenswert zu entnehmen, dass der Schnittpunkt der Gegenseiten der Kathetenquadrate (nach aussen oder innen) von C einen Abstand hat, der senkrecht und gleichgross AB ist (nach oben oder unten).

Ferner beachte man, dass die Schnittpunkte der Gegenseiten der Kathetenquadrate mit den in A und B auf c errichteten Senkrechten ebenfalls (in beiden Fällen) dieselbe Eigenschaft aufweisen.

Figur 28.



Daraus entsteht durch einfache Addition:

$$a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c(p + q) = c \cdot c = c^2$$

oder:

$$BCH_3H_1 + ACJ_3J_1 = BDGG_2 + ADGG_1 = ABG_2G_1.$$

Beweis II.

Die Quadrate über den drei Seiten des Dreiecks sind Parallelogramme und können daher nach Satz 10 oder Erkl. 64 behandelt werden.

1) Geht man aus vom Quadrat über $c: c^2 = ABA_3B_3$, zieht durch A_3 und B_3 die Parallelen zu AC und BC , sowie in A , B und C die Senkrechten darauf, so ist nach Satz 10:

$$ABA_3B_3 = BCB_1C_1 + ACA_2C_2$$

und es muss noch gezeigt werden, dass die beiden letztern Parallelogramme Quadrate sind. Nun sind aber die Dreiecke:

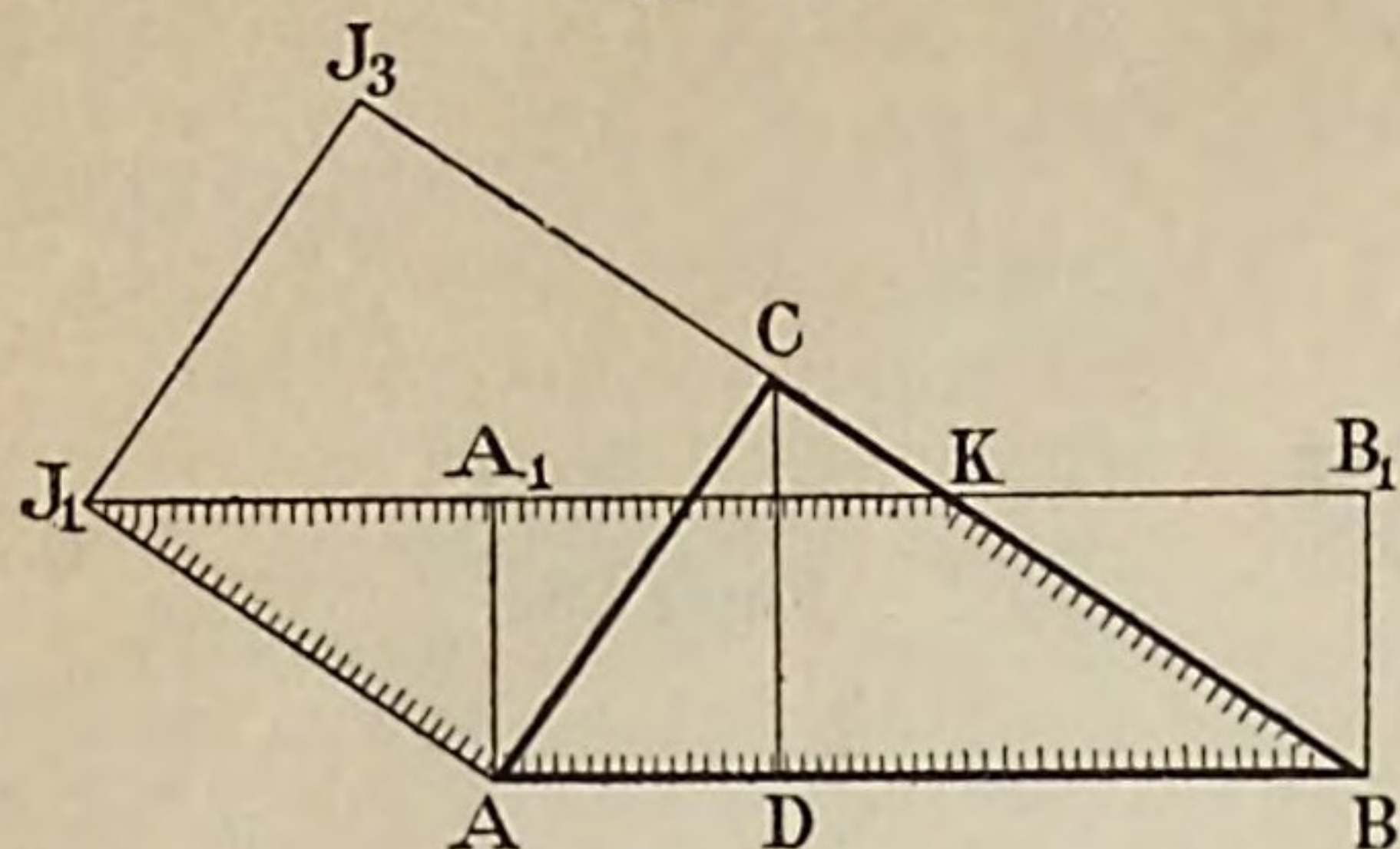
$$ABC \cong AA_3A_2 \cong B_3BB_1,$$

folglich:

$$AC = AA_2, BC = BB_1, ACA_2C_2 = b^2, BCB_1C_1 = b^2, c^2 = a^2 + b^2.$$

2) Geht man aus von den Quadraten $a^2 = ACA_2C_2$ und $b^2 = BCB_1C_1$, bringt

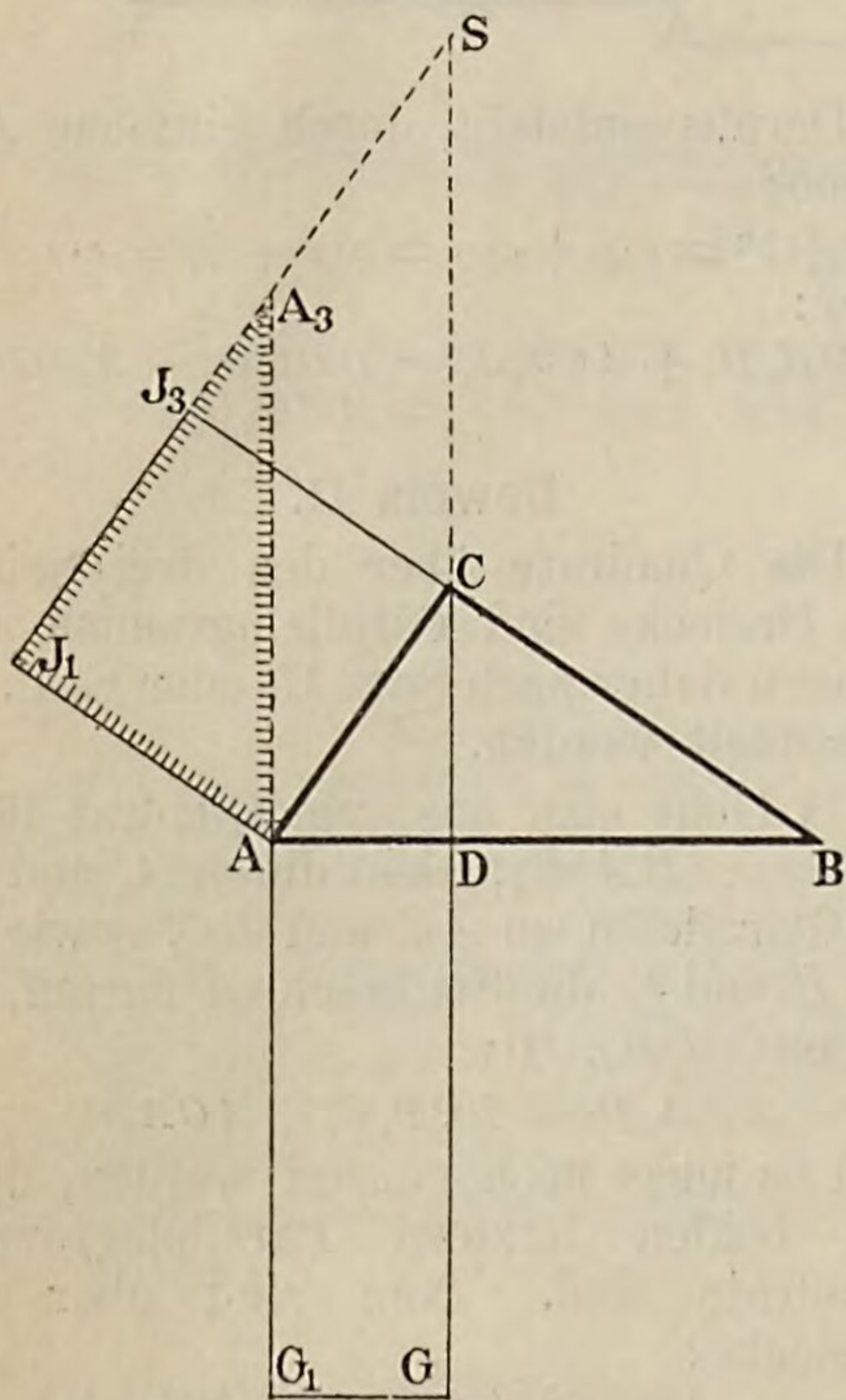
Figur 29.



Erkl. 77. Der Winkel der Dreiecke ADC und AA_1J (siehe Figur 29) sind gleich, weil die Schenkel des einen Dreiecks auf den Schenkeln des andern senkrecht stehen.

Um denselben Beweis III für die andere Kathete anzuwenden, käme die Parallele durch H_2 , lieferte ein Rechteck ABA_2B_2 gleich einem Parallelogramm ABH_2K , dessen Punkt K auf der Verlängerung von AC über Punkt C hinausfiele. Dann wäre das Dreieck BDC kongruent dem Dreieck BB_2H_2 , also $BB_2 = BD = p$.

Figur 30.



Erkl. 78. Man erkennt leicht, dass der nebenstehende Beweis IV nahe verwandt ist mit Beweis II, wobei aber das Quadrat c^2 , bzw. die Rechtecke cp und cq einzeln und an ihrer natürlichen Stelle behandelt werden.

die Gegenseiten A_2C_2 und B_1C_1 zum Schnitt und verbindet C mit dem Schnittpunkt, so muss nach Erkl. 64 die Summe $a^2 + b^2$ gleich dem Parallelogramm über c sein, dessen Seiten der Strecke CS parallel und gleich sind. Es ist also nachzuweisen, dass CS gleich AB und senkrecht AB ist. Nun hat das Rechteck CC_1C_2S die Seiten a und b , wird durch SC als Diagonale halbiert, folglich ist (siehe Figur 28):

$$\triangle CSC_2 \cong SCC_1 \cong ABC,$$

also $CS = AB$; und da die zwei Katheten der ersteren Dreiecke senkrecht stehen auf den entsprechenden von ABC , so muss auch $CS \perp AB$ sein. Also ist das über c zu konstruierende Parallelogramm ebenfalls ein Quadrat, und

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Beweis III.

Der Satz 12, aus dessen doppelter Anwendung der pythagoreische hervorgeht, kann ausser wie in Antwort 33 auch folgendermassen bewiesen werden:

Zieht man in Figur 29 die Höhe CD , ferner in A und B die Senkrechten AA_1 und BB_1 und durch J_1 parallel zu c die Gerade $J_1A_1KB_1$, so wird wegen gleicher Grundseite AB und Höhe AA_1 das Rechteck ABA_1B_1 gleich dem Parallelogramm AJ_1BK , und letzteres wegen gleicher Grundseite AJ_1 und Höhe AC gleich dem Quadrat $ACJ_1J_3 = b^2$. Nun ist aber wegen Gleichheit der Seiten $AC = AJ_1$ und aller Winkel auch:

$$\triangle ADC \cong AA_1J_1,$$

also:

$$AA_1 = AD = q$$

oder:

$$\text{Rechteck } ABA_1B_1 = AB \cdot AA_1 = c \cdot q.$$

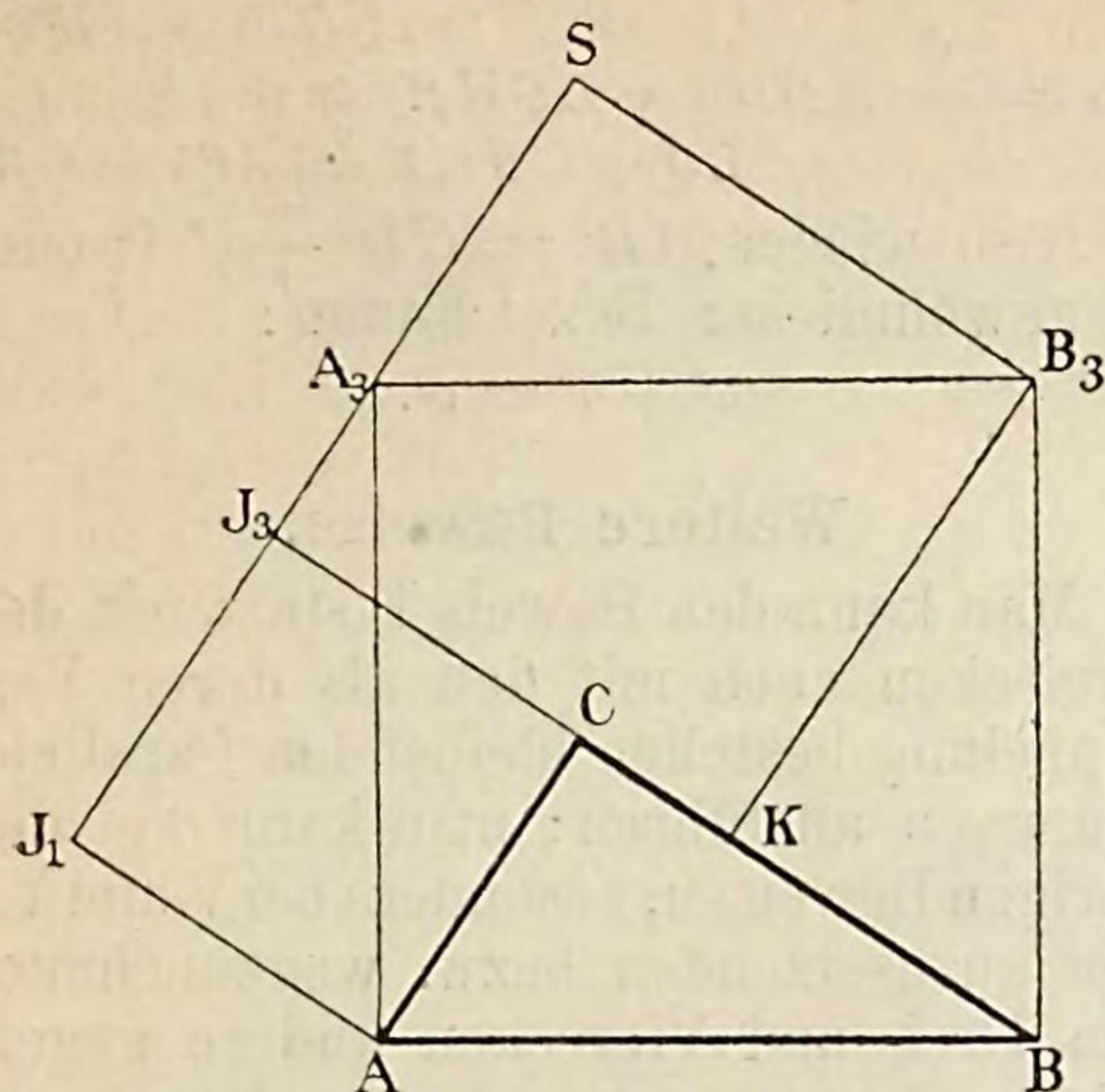
Daher ist $cq = b^2$. Da ebenso auch $c \cdot p = a^2$ zu beweisen ist, so bleibt wieder:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Beweis IV.

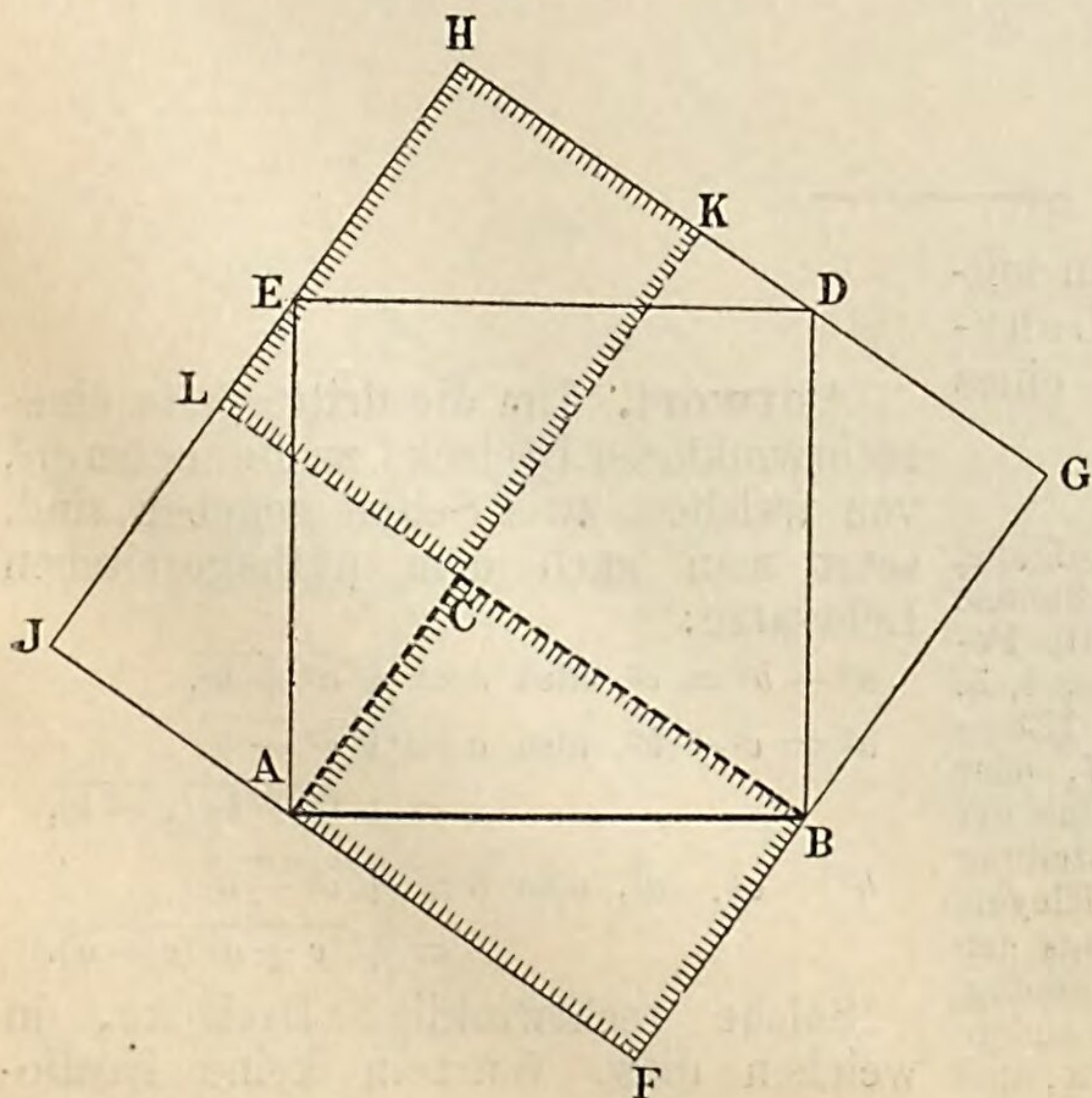
Denselben Beweissgang auf etwas andere Art erhält man durch Verlängerung der Linien h , AG_1 , JJ_1 bis zu den Schnittpunkten A_3 und S . Dann ist $b^2 = ACJJ_1 = ACA_3S$ wegen gleicher Grundseite AC und Höhe AJ_1 . Ferner

Figur 31.



Erkl. 79. Die Philosophenschule des Pythagoras beschäftigte sich zunächst nicht mit geometrischen Untersuchungen, sondern mit arithmetischen, die ins Gebiet der Zahlentheorie gehören. Eine solche Frage war die Zerlegung einer Quadratzahl in die Summe zweier solchen Zahlen, die einzeln wieder Quadratzahlen sind. Hatte man solche Zahlen gefunden und setzte aus deren Längenwerten ein Dreieck zusammen, so ergaben sich nach dem Angenscheine stets rechtwinklige Dreiecke. Dadurch wurde wohl erst rückwärts der Anstoss dazu gegeben, für das rechtwinklige Dreieck diese Eigenschaft allgemein zu beweisen. So lässt sich auch allen diesen Beweisen ziemlich anmerken, dass sie beweisen wollen, was schon zuvor erkannt worden.

Figur 32.



ist wegen Gleichheit der Winkel und der Seite $CJ_3 = CA = b$ auch:

$$\triangle CSJ_3 \cong ABC,$$

also:

$$CS = AB = DG,$$

und folglich Parallelogramm ACA_3S gleich Rechteck $ADGG_1 = q \cdot c$ wegen gleicher Grundseite $CS = DG$ und Höhe AD , also $b^2 = c \cdot q$. Dann ist wieder $c \cdot p = a^2$, also:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Beweis V.

Zeichnet man das Hypotenusenquadrat nach oben und zieht $B_3K \perp BC$, so ist:

$$ABC \cong BB_3K \text{ oder } KB_3 = CB = a.$$

Nimmt man diese beiden Dreiecksflächen aus dem Quadrat heraus und setzt sie an die beiden andern Seiten aussen wieder an als $\triangle AA_3J_1$ und A_3B_3S , so wird SJ_1 eine gerade Linie, und senkrecht CJ_3 , weil $\angle SA_3B_3 + \angle J_1A_3A = 90^\circ$ und $\angle A_3B_3S = \angle BB_3K$. Folglich ist:

$$AJ_1CJ_3 = b^2, \quad J_3KB_3S = a^2$$

und es wird:

$$\begin{aligned} \text{Fünfeck } ACKB_3A_3 + ABC + BB_3K &= c^2 = \\ \text{Fünfeck } ACKB_3A_3 + AA_3J_1 + A_3B_3S &= \\ &= b^2 + a^2; \end{aligned}$$

also:

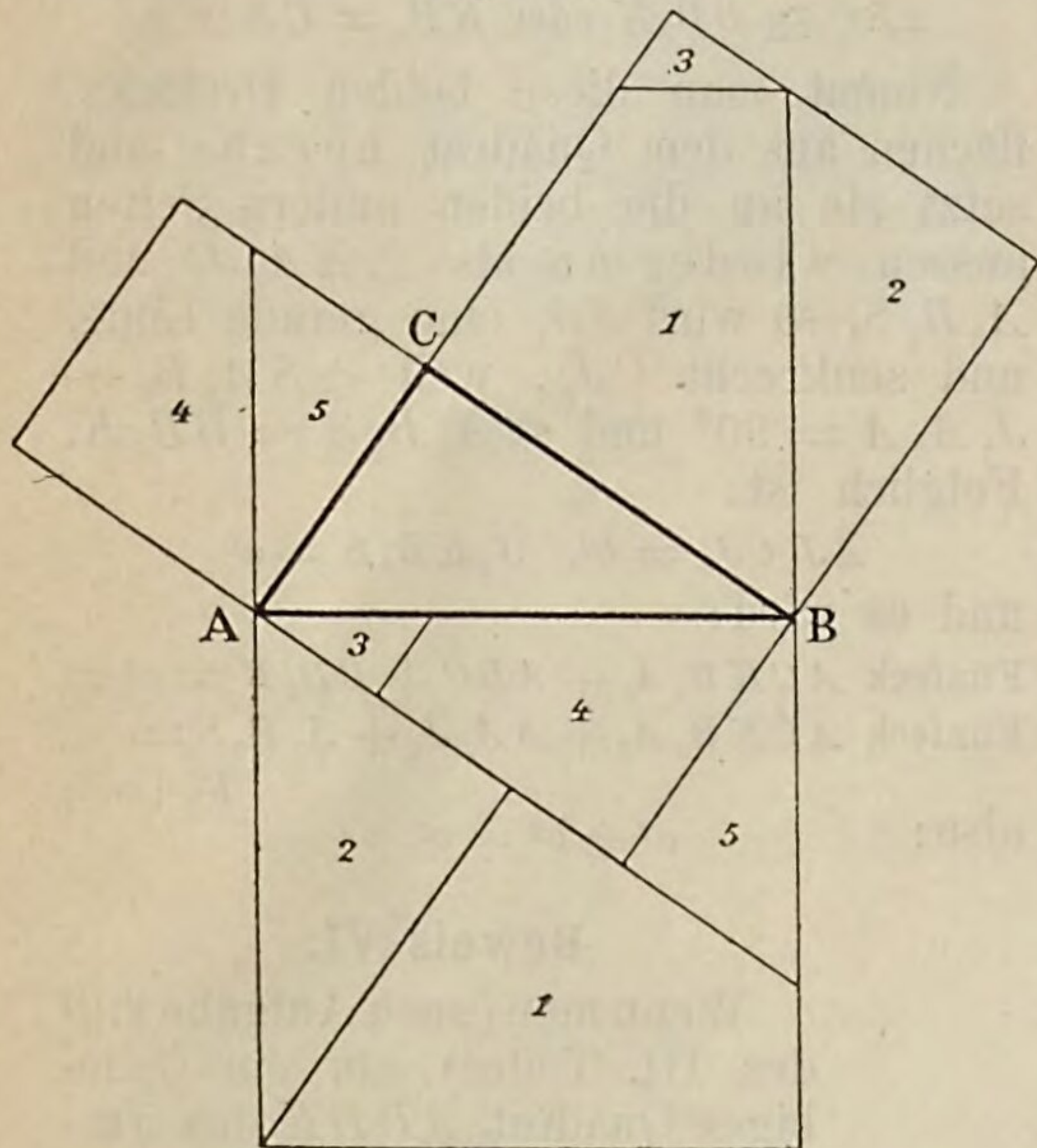
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Beweis VI.

Wenn man (nach Aufgabe 298 des III. Teiles) um ein beliebiges Quadrat $ABDE$ das umgeschriebene Quadrat $FGHJ$ zeichnet und zieht $AK \parallel FG$ und $BL \parallel FJ$, so besteht das Quadrat $FGHJ$ aus den beiden Quadraten $ACLJ$ und $CBGK$ und den beiden gleichgrossen Rechtecken $AFBC$ und $LCKH$. Von diesen Rechtecken ist jedes doppelt so gross als eines der von dem grossen Quadrate $JFGH$ durch $ABDE$ abgeschnittenen vier Dreiecke, z. B. $AFB = ABC$. Es muss also durch Wegnahme aller vier Dreiecke derselbe Rest bleiben, wie durch Wegnahme der beiden Rechtecke:

Erkl. 80. Die im nebenstehenden angeführten verschiedenen Beweise sind nur die bekanntesten aus der grossen Zahl der in den 2400 Jahren seit der Entdeckung des Satzes erfundenen Beweise. Wollte man alle verschiedenen Abänderungen oder Uebergänge zwischen den einzelnen Beweisen mitzählen, so würde die Zahl 100 weitaus nicht ausreichen, um die „Anzahl“ der Beweise zu zählen. Doch erkennt man schon aus den angegebenen Arten, dass dieselben Grundsätze nur in teilweise unwesentlicher Abänderung zur Anwendung kommen. Einen sehr eleganten Beweis mit den Mitteln der Ähnlichkeitslehre findet man im VII. Teile dieses Lehrbuches bei der Lehre von den Anwendungen der Ähnlichkeit der Dreiecke.

Figur 33.



Frage 35. Wie berechnet man mittels des pythagoreischen Lehrsatzes die Längen der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks?

Erkl. 81. Es ist eine algebraische Aufgabe, solche Zahlen aufzusuchen, dass die Summe ihrer zweiten Potenzen wieder eine zweite Potenz darstellt. Das Muster für alle ist 3, 4, 5. Andere sind 5, 12, 13 (weil $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$) oder 8, 15, 17, oder 7, 24, 25; 9, 10, 41. Bei andern ist keine der drei Zahlen unter 10. Eine Zusammenstellung vieler solcher Zahlen findet man in Kleyers Lehrbuch der Trigonometrie. Es folgt aus den Anforderungen der algebraischen Auffassung, dass eine der Katheten stets gerade, die andere und die Hypotenuse ungerade Zahlen hat, und

$$FGHJ - (AFB + BGD + DHE + EJA) = ABDE = AB^2 =$$

$$FGHJ - (AFBC + LCKH) = ACLJ + CBGK = AC^2 + CB^2.$$

Also wieder $AB^2 = CB^2 + CA^2$ oder in gewöhnlicher Bezeichnung:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Weitere Beweise.

Man kann den Beweis I statt mit den Dreiecken auch mit den als deren Verdoppelung bestehen bleibenden Parallelogrammen ausführen; man kann bei den übrigen Beweisen, besonders bei V und VI, den anzusetzenden bzw. wegzunehmenden Drei- und Vierecken andere gegenseitige Lagen geben; man kann verschiedene sonstige Zerlegungen der drei Quadrate finden, bei welchen durch Kongruenz einzelner Stücke die Gleichheit der Ganzen folgt. Ein Beispiel einer solchen aus vielen zeigt Figur 33.

Antwort. Um die dritte Seite eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen, von welchem zwei Seiten gegeben sind, setzt man nach dem pythagoreischen Lehrsatz:

$$a^2 + b^2 = c^2, \text{ also } c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$a^2 = c^2 - b^2, \text{ also } a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$= \sqrt{(c + b)(c - b)},$$

$$b^2 = c^2 - a^2, \text{ also } b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$= \sqrt{(c + a)(c - a)}.$$

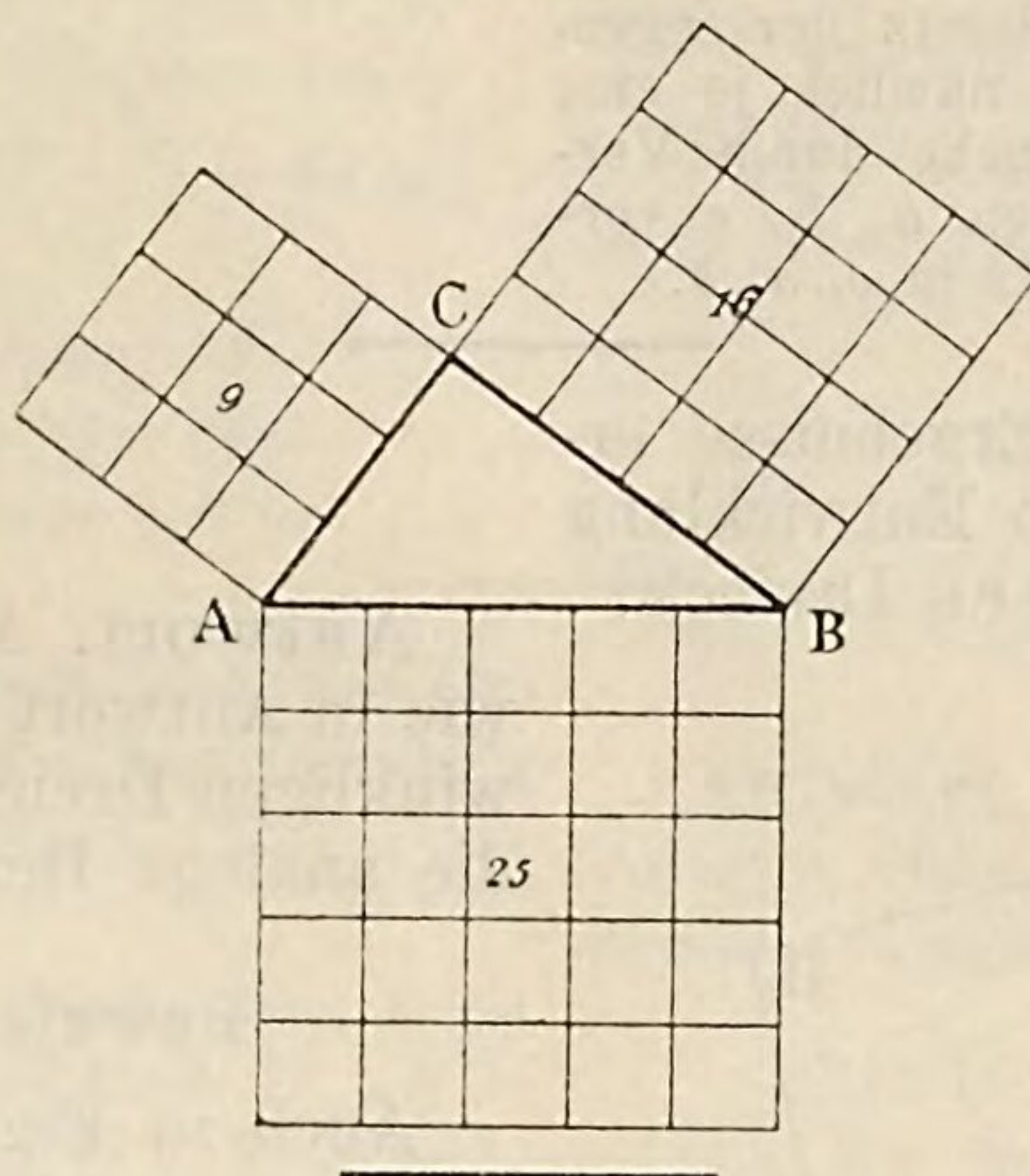
Solche rechtwinklige Dreiecke, in welchen diese Wurzeln keine irratio-

ferner, dass eine der Katheten durch 3, eine der drei Zahlen überhaupt durch 5 teilbar sein muss. Man beachte ferner, dass wenn a, b, c selbst drei solche Ziffern sind, dann durch beliebige Erweiterung der Gleichung neue (aber nicht unabhängige) Gruppen gebildet werden können: wenn nämlich $a^2 + b^2 = c^2$, so ist auch $(a \cdot n)^2 + (b \cdot n)^2 = (c \cdot n)^2$, also z. B. anwendbar nicht nur 3, 4, 5, sondern auch 6, 8, 10, oder $\frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}$ u. s. w.

nalen Zahlen liefern, nennt man rationale oder pythagoreische Dreiecke. Ist z. B. die Hypotenuse gleich 5, die Katheten 3 und 4, so kann man, wie in Figur 34 geschehen, die auf jeder Seite des Dreiecks gezeichneten Quadrate durch Parallele zerlegen und erhält in den gewählten Flächeneinheiten die anschauliche Bestätigung:

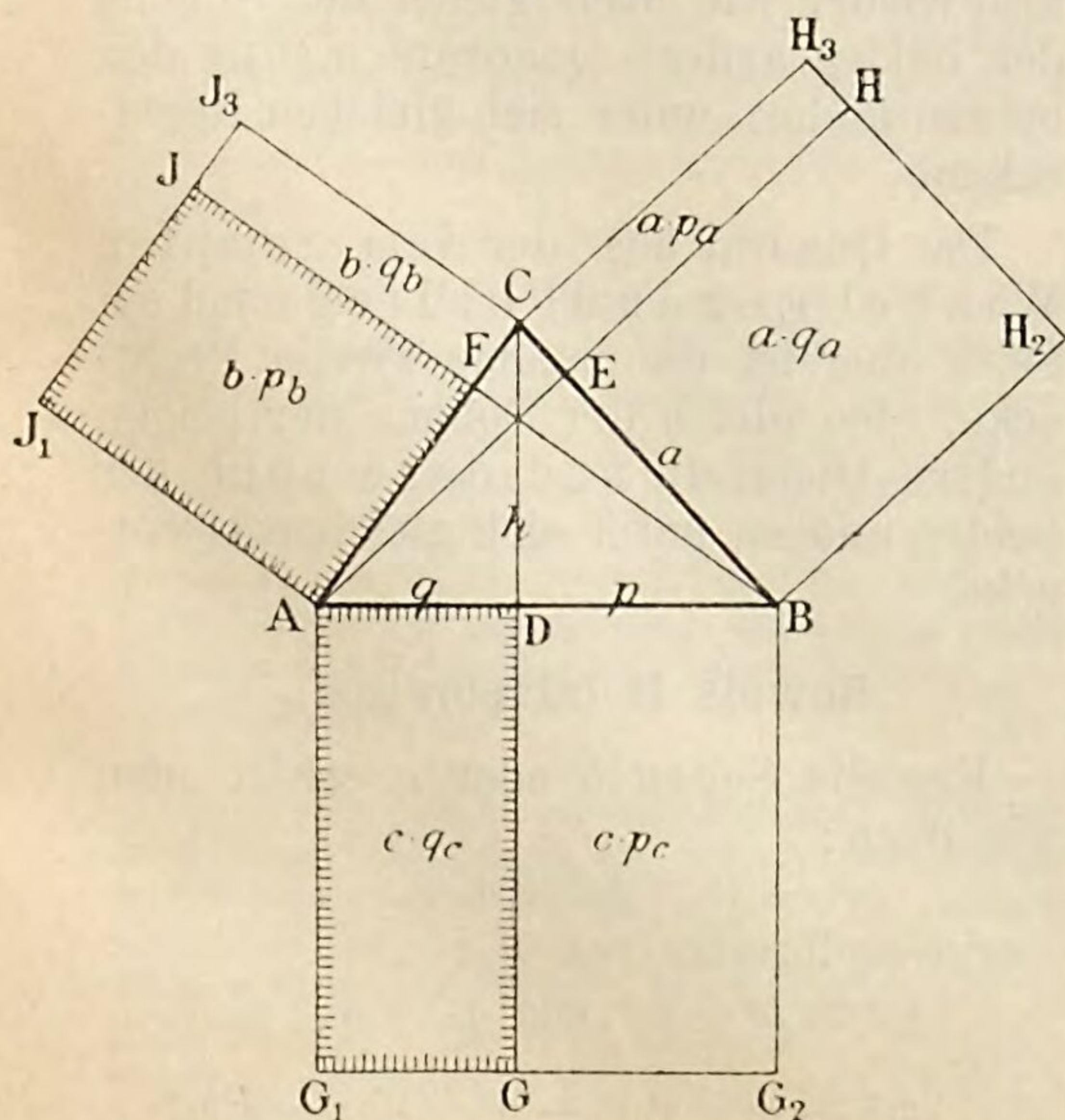
$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 9 + 16 = 25.$$

Figur 34.



Frage 36. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Seiten eines schiefwinkligen und zwar zunächst eines spitzwinkligen Dreiecks?

Figur 35.



Antwort. Um das Bestehen einer Beziehung unter den Seiten eines schiefwinkligen Dreiecks nachzuweisen, kann man folgendermassen zweifach verfahren:

Beweis I (geometrisch).

Nach dem Satz 11 ist in Figur 35 je eines der Rechtecke aus einer Seite und der Projektion der andern gleich dem an derselben Ecke des Dreiecks anstossenden Rechtecke. Nimmt man also deren zwei zu einem der Quadrate zusammen, so findet man, dass das Quadrat gleich ist der Summe der beiden anstossenden Rechtecke, oder gleich der Summe der beiden andern Quadrate minus den beiden andern unter sich gleichen Rechtecken.

Beweis II (algebraisch).

Ohne auf Satz 11 zurückzugreifen, kann man an einem spitzwinkligen Dreiecke (siehe Figur 35) bloss mittels des

Erkl. 82. Wird das nebenstehende Ergebnis für die drei Seiten einzeln angeschrieben, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichheit je zweier Rechtecke nach Erkl. 69:

Im spitzwinkligen Dreieck:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot q_c = b^2 + c^2 - 2b \cdot p_b,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2a \cdot q_a = c^2 + a^2 - 2c \cdot p_c,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2b \cdot q_b = a^2 + b^2 - 2a \cdot p_a.$$

Oder auch einzeln:

$$a^2 = a \cdot p_a + a \cdot q_a = b \cdot q_b + c \cdot p_c,$$

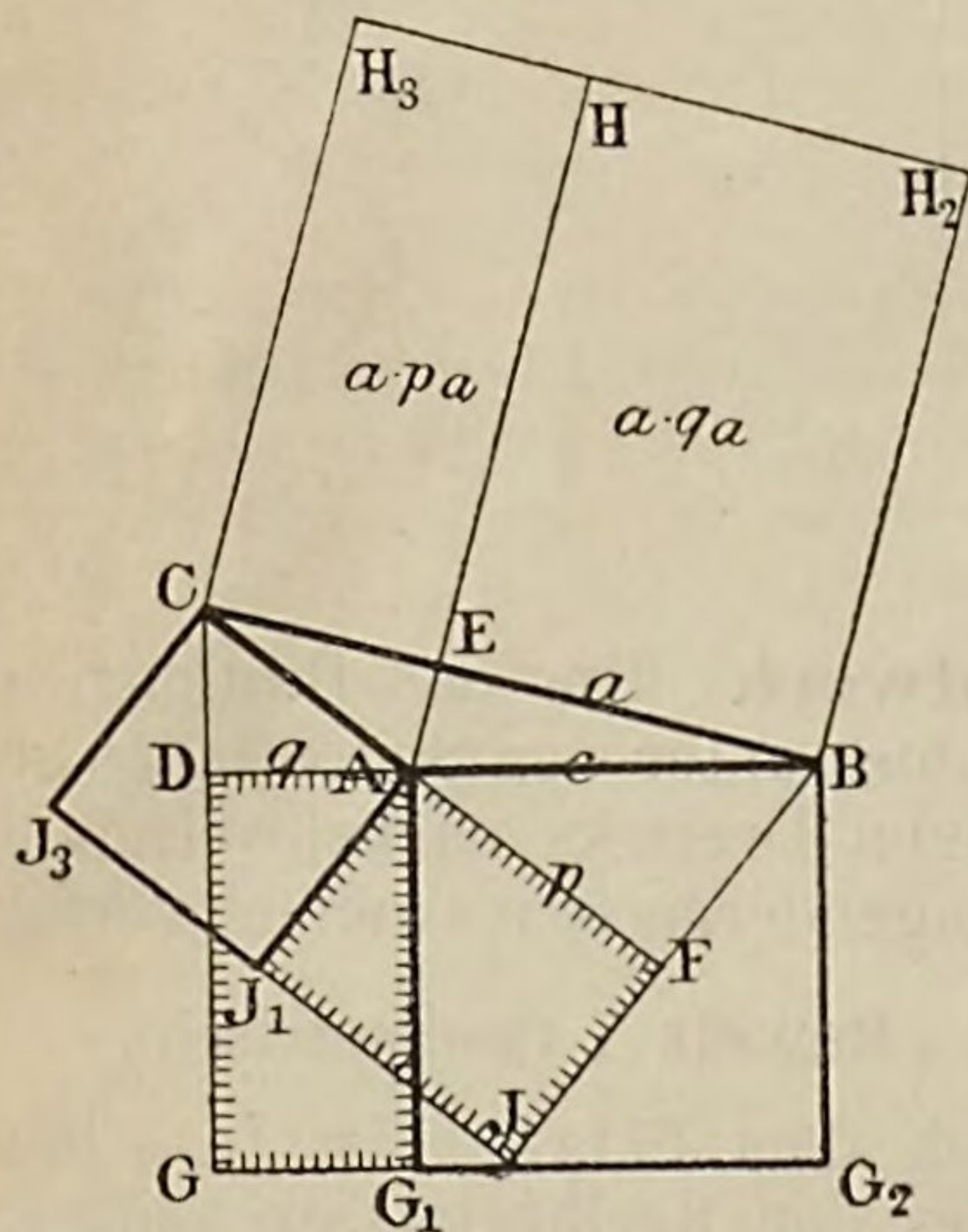
$$b^2 = b \cdot p_b + b \cdot q_b = c \cdot q_c + a \cdot p_a,$$

$$c^2 = c \cdot p_c + c \cdot q_c = a \cdot q_a + b \cdot p_b.$$

Man beachte hierbei das Gesetz der sogen. cyclischen Vertauschung, dass nämlich je eine Zeile aus der andern hervorgeht durch Vertauschung der drei Buchstaben a, b, c vorwärts in b, c, a oder rückwärts in c, a, b .

Frage 37. Welche Ergebnisse erhält man nach der vorigen Entwicklung für ein stumpfwinkliges Dreieck?

Figur 36.



Erkl. 83. Man hat in Figur 36 den doppelten Unterschied gegen Figur 35 wohl zu beachten: Nur für die einzige Seite a gegenüber dem stumpfen Winkel trifft die Zusammensetzung aus den Rechtecken $ap_a + aq_a$ ebenso zu. Für die beiden andern Seiten aber ist:

$$p_c = BD, \quad q_c = AD;$$

$$q_b = CF, \quad p_b = AF.$$

Es ist also:

$$ap_a = CEHH_3 = CFJJ_3 = bq_b$$

und

$$aq_a = BEHH_2 = BDGG_2 = cp_c.$$

Es ist also das Quadrat:

$$\begin{aligned} a^2 &= BCH_2H_3 = BDGG_2 + CFJJ_3 = cp_c + bq_b \\ &= (ABG_1G_2 + ADGG_1) + (ACJ_1J_3 + AFJJ_1) \\ &= (c^2 + cq_c) + (b^2 + bp_b) = b^2 + c^2 + 2bp_b \\ &= b^2 + c^2 + 2cq_c. \end{aligned}$$

speziellen pythagoreischen Lehrsatzes 13 nachweisen:

$$a^2 = h^2 + p^2,$$

worin nach der andern Seite von h :

$$h^2 = b^2 - q^2 \quad \text{und} \quad p = c - q,$$

also:

$$p^2 = (c - q)^2 = c^2 - 2cq + q^2.$$

Dadurch wird:

$$a^2 = (b^2 - q^2) + (c^2 - 2cq + q^2) = b^2 + c^2 - 2cq.$$

Antwort. Auf dieselben beiden Arten wie in Antwort 35 kann auch im stumpfwinkligen Dreieck verfahren werden, um die analoge Beziehung nachzuweisen:

Beweis I (geometrisch).

Auch in Figur 36 sind nach Satz 11 je zwei an demselben Eckpunkte des Dreiecks zusammenstossende Rechtecke einander gleich. Ein Quadrat über einer Seite gegenüber einem spitzen Winkel ist aber die Differenz der zwei anstossenden Rechtecke (vergl. Erkl. 83), also wieder wie oben gleich der Summe der beiden andern Quadrate minus den beiden andern unter sich gleichen Rechtecken.

Das Quadrat über der dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite aber ist die Summe zweier Rechtecke, also gleich der Summe der beiden andern Quadrate und dazu noch der beiden andern unter sich gleichen Rechtecke.

Beweis II (algebraisch).

Für die Seiten b oder c erhält man wie oben:

$$c^2 = h_a^2 + q_a^2,$$

worin andererseits von h_a :

$$h_a^2 = b^2 - p_a^2 \quad \text{und} \quad q_a = a - p_a,$$

also:

$$q_a^2 = (a - p_a)^2 = a^2 - 2a \cdot p_a + p_a^2.$$

Dagegen wird z. B. das Quadrat:

$$\begin{aligned} b^2 &= CAJ_1J_3 = CFJJ_3 - AFJJ_1 \\ &= CEHH_3 - ADGG_1 = ap_a - cq_c \\ &= (CBH_2H_3 - BEHH_2) - (BDGG_2 - ABG_1G_2) \\ &= (a^2 - aq_a) - (cp_c - c^2) = a^2 + c^2 - 2aq_a \\ &= a^2 + c^2 - 2cp_c. \end{aligned}$$

Erkl. 84. Für die drei Seiten einzeln erhält man ähnlich wie in Erkl. 82:

Im stumpfwinkligen Dreieck mit dem stumpfen Winkel α gegenüber a :

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 + 2cq_c = b^2 + c^2 + 2bp_b, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2aq_a = c^2 + a^2 - 2cp_c, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2bq_b = a^2 + b^2 - 2ap_a. \end{aligned}$$

Oder auch einzeln:

$$\begin{aligned} a^2 &= ap_a + aq_a = bq_b + cp_c, \\ b^2 &= bq_b - bp_b = ap_a - cq_c, \\ c^2 &= cp_c - cq_c = aq_a - b \cdot p_b. \end{aligned}$$

Also wird:

$$c^2 = (b^2 - p_a^2) + (a^2 - 2a \cdot p_a + p_a^2) = a^2 + b^2 - 2a \cdot p_a.$$

Dagegen erhält man für die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite a , indem jetzt die Strecke $BD = p_c$ und $AD = q_c$ ist:

$$a^2 = h_c^2 + p_c^2,$$

worin aus Dreieck ACD :

$$h^2 = b^2 - q^2 \text{ und } p = c + q,$$

also:

$$p^2 = (c + q)^2 = c^2 + 2cq + q^2.$$

Folglich entsteht jetzt:

$$a^2 = (b^2 - q^2) + (c^2 + 2cq + q^2) = b^2 + c^2 + 2cq.$$

Frage 38. Wie lassen sich die Ergebnisse der beiden vorigen Antworten in Sätzen zusammenfassen?

Erkl. 85. Der nebenstehende Satz heisst als Erweiterung des Satzes 13 auch der „allgemeine“ oder der „erweiterte pythagoreische Lehrsatz“; im Gegensatz hiezu der Satz 13 auch der spezielle pythagoreische Lehrsatz.

Erkl. 86. Das Rechteck, dessen Fläche doppelt abgezogen bzw. zugefügt werden soll, kann nach Satz 11 gebildet werden entweder aus der einen Seite und der Projektion der andern auf diese erste, oder aus dieser andern Seite und der Projektion jener ersten auf diese andere. Nach Satz 11 ist die Fläche des so entstehenden Rechtecks beidemale dieselbe.

Erkl. 87. Man kann an Figur 35 und 36 erkennen, dass jedesmal das nicht schattierte Quadrat gleich ist der Summe der beiden nicht schattierten Rechtecke, bzw. gleich der um die beiden schattierten Rechtecke verminderten bzw. vermehrten Summe der beiden andern Quadrate. Als nicht schattierte Rechtecke gelten dabei in Figur 36 auch die Rechtecke, welche aus einem Quadrat plus einem schattierten Rechteck zusammengesetzt sind.

Erkl. 88. Es ist leicht einzusehen, dass der spezielle pythagoreische Lehrsatz im allgemeinen enthalten ist, denn die Formeln in Erkl. 82 und 84 gehen für das rechtwinklige Dreieck vollständig in einander über. Wird nämlich der für Erkl. 82 spitze, für Erkl. 84 stumpfe Winkel α zu einem Rechten, so werden in jenen Formeln: $p_b = 0 = q_c$ und $q_b = b$, $p_c = c$, also bleibt

Antwort. Die Ergebnisse der beiden vorigen Antworten lassen sich folgendermassen aussprechen:

Satz 14. In einem beliebigen Dreieck ist das Quadrat einer einem **spitzen** Winkel gegenüberliegenden Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten **vermindert** um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der andern auf dieselbe.

Satz 14 a. In einem beliebigen Dreieck ist das Quadrat einer einem **stumpfen** Winkel gegenüberliegenden Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten **vermehrt** um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der andern auf dieselbe.

bestehen nur p_a und q_a , und es sind nach jenen Formeln gemeinsam:

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 0 = a \cdot p_a + a \cdot q_a = b \cdot b + c \cdot c.$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot q_a = c^2 + a^2 - 2c \cdot c = b \cdot b \pm 0 = a \cdot p_a \pm 0.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2b \cdot b = a^2 + b^2 - 2a p_a = c \cdot c \pm 0 = a q_a \pm 0.$$

In den beiden letzten Gleichungen ist Satz 12 enthalten, dass $b^2 = a \cdot p_a$ und $c^2 = a q_a$. Dadurch gehen die beiden Zeilen über in:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2c^2 = a^2 - c^2$$

und

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2b^2 = a^2 - b^2.$$

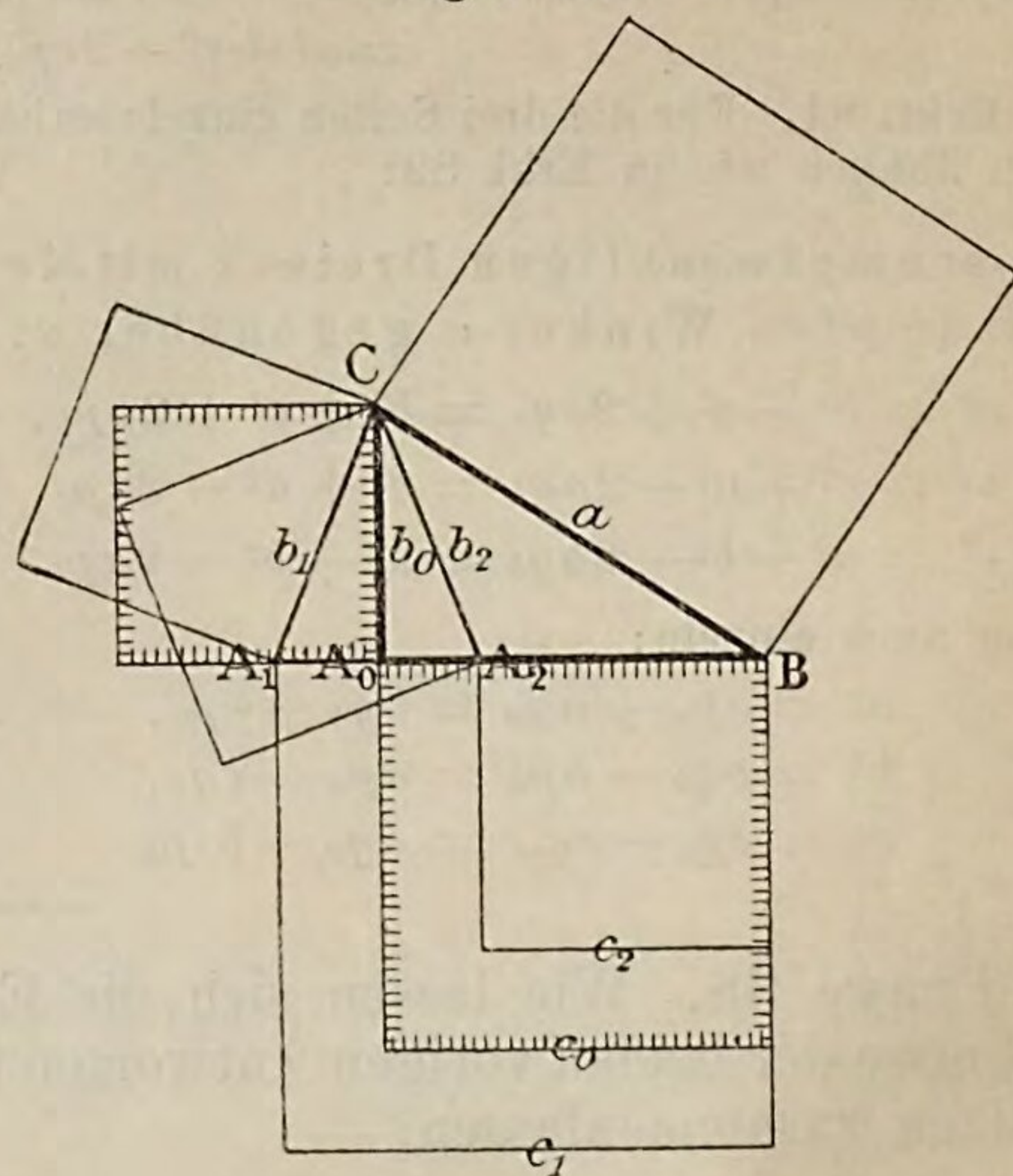
Erkl. 89. Auch die beiden Fälle des allgemeinen pythagoreischen Satzes und damit alle drei Sätze können in einander übergeführt werden, wenn man den Projektionen p und q Vorzeichen beilegt, nämlich jede positiv rechnet, wenn ihre Richtung vom Eckpunkt nach dem Innern der Seitenstrecke geht, dagegen negativ, wenn diese Richtung vom Eckpunkt nach der Verlängerung der Seitenstrecke gerichtet ist. Wird diese Festsetzung getroffen, so sind sämtliche Sätze 11 bis 14 ausgedrückt in einer einzigen Formel (mit ihren cyklischen Vertauschungen), etwa:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c q_c = b^2 + c^2 - 2b p_b = b q_b + c p_c.$$

Denn beim stumpfwinkligen Dreieck werden dann gerade diejenigen Projektionen negativ, welche die Unterscheidungen der Sätze 14 und 14a ausmachen, beim rechtwinkligen verschwinden nach Erkl. 88 dieselben Projektionen selbst.

Erkl. 90. In Figur 37 erkennt man den Uebergang der drei Sätze figürlich: Da $A_0 A_1 = A_0 A_2$ gewählt ist, so ist $b_1 = b_2$, beide grösser als b_0 , dagegen $c_1 > c_0 > c_2$. Während also a^2 stets dieselbe Grösse behält, und genau gleich $b_0^2 + c_0^2$ ist, wird für die beiden grösseren Seiten b_1 und c_1 selbstverständlich $b_1^2 + c_1^2$ grösser als a^2 , also $a^2 = b_1^2 + c_1^2$ minus $2c_1 \cdot q_c$. Für A_2 dagegen wird zwar c_2 kleiner und b_2 grösser als c_0 und b_0 , aber doch ist die Verkleinerung von c_0 bis c_2 eine viel stärkere, als die Vergrößerung von b_0 bis b_2 . Daher kann jetzt $b_2^2 + c_2^2$ den Wert a^2 nicht mehr erreichen, $b_2^2 + c_2^2$ kleiner als a^2 , also $a^2 = b_2^2 + c_2^2$ plus $2 \cdot c_2 q_c$. Immerhin ist durch den eben genannten teilweisen Ausgleich die Ergänzungsgrösse $2 \cdot c_2 q$ in Figur 37 bedeutend geringer, als die vorherige $2 \cdot c_1 q$, da hierin $2q$ gleichbleibt, und c_1 grösser als c_2 ist. Denn bei A_1 wird sowohl b_1 als c_1 grösser, musste also bei beiden Quadraten b_1^2 und c_1^2 abgezogen werden; bei A_2 aber wird nur c_2^2 kleiner, b_2^2 aber grösser, es braucht also nur soviel noch zugefügt werden, als durch die Vergrößerung von b_2^2 nicht schon aufgewogen wird.

Figur 37. *HL*



Erkl. 91. Die Vergleichung der drei Sätze 13, 14, 14a nach Erkl. 88 bis 90 bildet eine Erweiterung zu dem frühern Satz 49 im III. Teile dieses Lehrbuchs, dass eine Seite grösser als die Differenz und kleiner als die Summe der beiden andern sei, also $b - c < a < b + c$. Wird diese Ungleichung quadriert, so entsteht:

$$(b - c)^2 < a^2 < (b + c)^2$$

oder:

$$b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c < a^2 < b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c.$$

Nach den Sätzen 14 aber erhält man für stumpfen oder spitzen Winkel α :

$$b^2 + c^2 - 2c \cdot q < a^2 < b^2 + c^2 + 2c q.$$

Man beachte nun, dass die obere Grenze für $+q_c$ wirklich $+b$ ist, weil ja q_c die Projektion von b auf c ist, und die Projektion nach Antwort der Frage 32 nie grösser als die projizierte Strecke werden kann. Ferner wird die linke Seite obiger Ungleichung ihren kleinsten Wert erhalten, wenn das grösstmögliche q im Subtrahend eingesetzt, die rechte gleichzeitig ihren grössten, wenn das grösstmögliche q im Addend eingesetzt wird; und so geht denn auch die pythagoreische Ungleichung wirklich über in jene ursprünglichste:

$$b^2 + c^2 - 2c \cdot b < a^2 < b^2 + c^2 + 2 \cdot c b$$

oder nach Ausziehen der Quadratwurzel:

$$b - c < a < b + c.$$

Frage 39. Wie lassen sich die pythagoreischen Sätze umkehren?

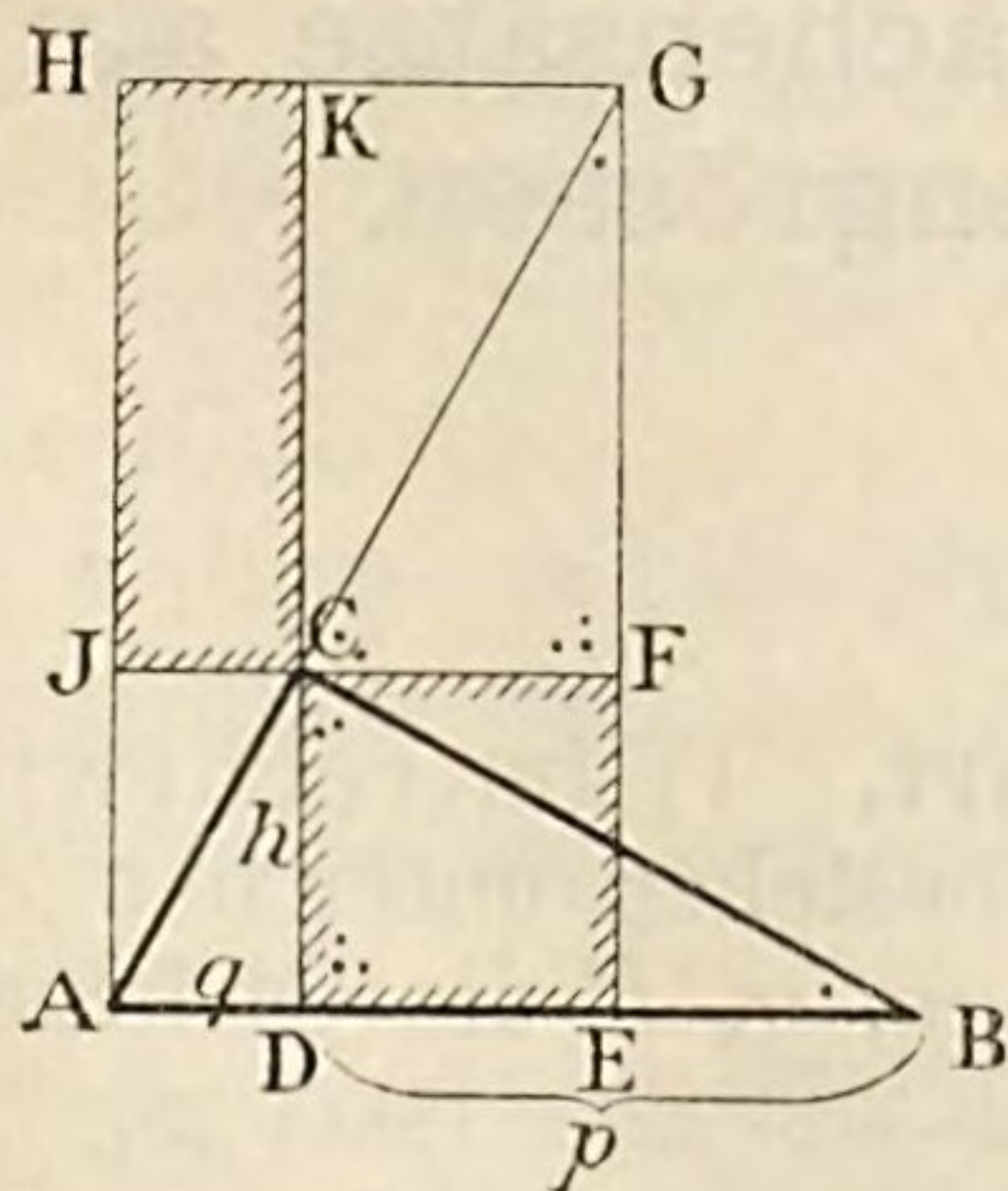
Erkl. 92. Der Beweis der nebenstehenden Aussage liegt zwar schon in der Ausschliesslichkeit der in den bisherigen Ueberlegungen erhaltenen Ergebnisse; man kann aber auch den indirekten Beweis leicht führen, indem man jeweils das rechtwinklige Dreieck mit Hypotenuse a und etwa Kathete c zeichnet. Für dieses ist a^2 gleich $b'^2 + c^2$, wo b' die zweite Kathete dieses Dreiecks sei. Dann muss nach der Voraussetzung $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2cq$ sein, also $b'^2 = b^2 \pm 2cq$. Ist also $q = 0$, so muss $b' = b$, also das Dreieck rechtwinklig sein, ist aber $q \geq 0$, so muss $b > b'$ sein in der dem Vorzeichen von q entsprechenden Weise, also der Winkel α spitz oder stumpf.

Frage 40. Welche Ergebnisse für die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks ergeben sich aus den bisherigen Ueberlegungen?

Erkl. 93. Der nebenstehende Satz 16 kann auch folgendermassen bewiesen werden:

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 - p^2 \\ h^2 &= b^2 - q^2 \\ \hline 2h^2 &= a^2 - p^2 + b^2 - q^2 = c^2 - p^2 - q^2 \\ &= (p + q)^2 - p^2 - q^2 = 2pq \text{ also } h^2 = pq. \end{aligned}$$

Figur 38.



Erkl. 94. Derselbe Satz kann auch rein geometrisch bewiesen werden durch den Satz in Antwort der Frage 25. Zeichnet man nämlich zu dem rechtwinkligen Dreieck ABC in Figur 38 das Quadrat der Höhe $DCEF$ und vervollständigt das Rechteck $AEGH$, so wird AG Diagonale, also als Ergänzungsparallelogramm $DEFC = CJHK$. In letzterm ist aber $CJ = AD = q$ und $CK = FG$; und da das Dreieck $CFG \cong CDB$ wegen Gleichheit der Quadratseiten $CD = CF$ und aller Winkel, so muss $FG = DB = p$ sein. Folglich $CJHK = p \cdot q$, und $h^2 = p \cdot q$.

Antwort. Als Umkehrung der in Satz 13 und 14 ausgesprochenen Sätze kann man folgende Aussagen machen:

Satz 15. Wenn das Quadrat einer Dreiecksseite a kleiner oder gleichgross oder grösser ist, als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, so ist der Gegenwinkel α jener Seite kleiner, gleich oder grösser als ein Rechter.

Antwort. 1) Die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks ist Kathete in jedem der Teildreiecke mit Seiten a, p, h bzw. b, h, q , welche nach Aufgabe 129 des II. Teils gleiche Winkel haben. Demnach ist:

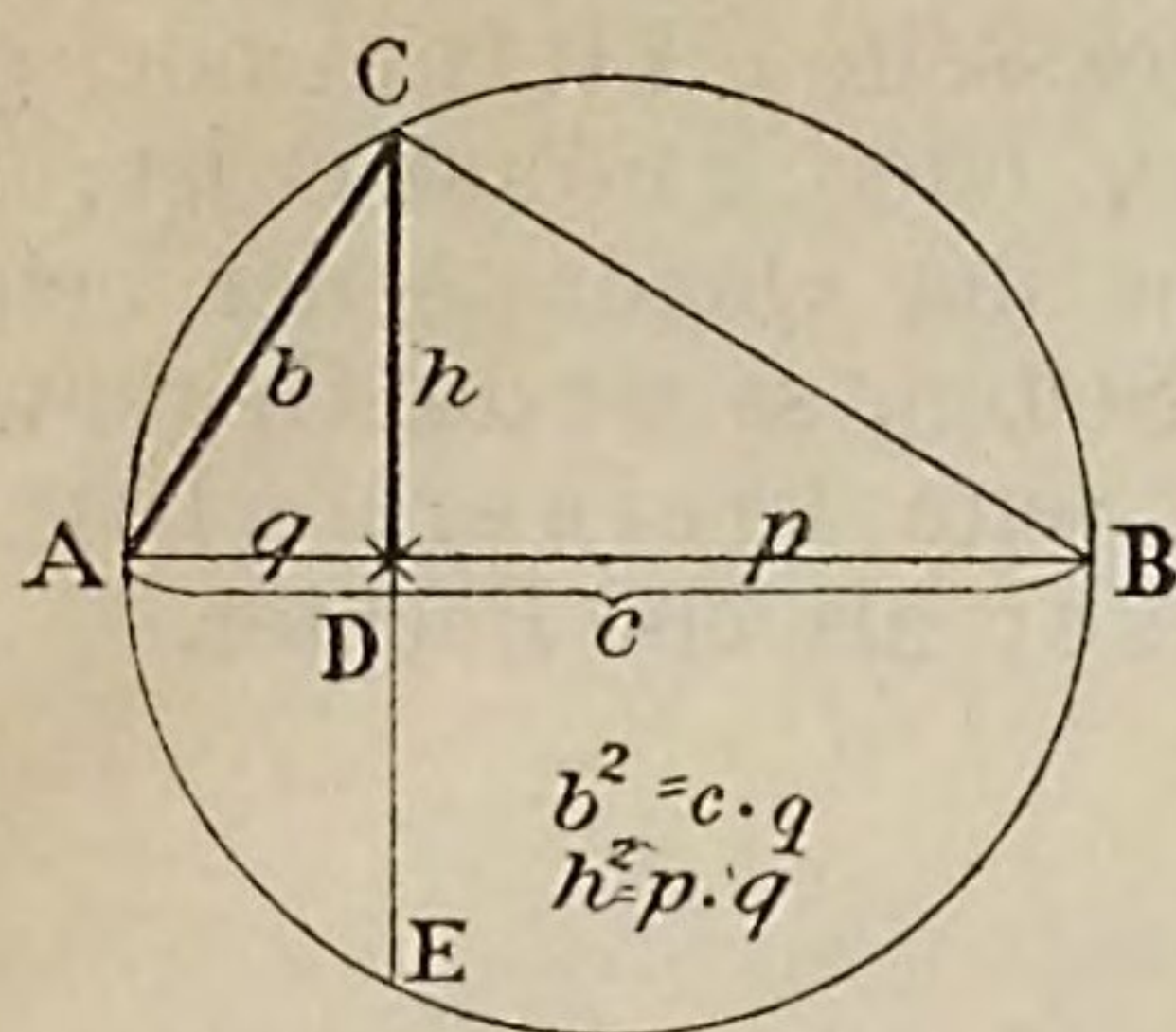
$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 - p^2 \\ \text{oder, da nach Satz 12 } a^2 &= c \cdot p \text{ ist,} \\ h^2 &= cp - p^2 = p(c - p) = p \cdot q. \end{aligned}$$

2) Man kann daher die Aussagen machen:

Satz 16. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Höhe gleich dem Rechteck aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Frage 41. Welche Ergebnisse liefert die Uebertragung der bisherigen Sätze auf den Kreis?

Figur 39.



Erkl. 95. Es ist in Figur 39:

$$\overline{AC}^2 = AB \cdot AD \text{ und } \overline{BC}^2 = AB \cdot BD$$

und ebenso auch $\overline{CD}^2 = DA \cdot DB$.

Da alle Winkel Rechte sind, deren Schenkel durch A und B gehen, und deren Scheitel auf der Peripherie liegen, so kann man auch folgenden geometrischen Ortssatz aussprechen:

Satz. Der geometrische Ort für einen Punkt, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten A und B das Quadrat dieser Strecke als Quadratsumme ergeben, ist der über der Strecke AB als Durchmesser beschriebene Kreis.

Antwort. Im Kreise liefert jeder Durchmesser die Hypotenuse beliebig vieler rechtwinkligen Dreiecke, welche ihren Scheitel auf der Peripherie des Halbkreises haben. Die Katheten sind Sehnen, die Höhe ist eine vom Durchmesser senkrecht halbierte Sehne. Die Sätze 12 und 16 ergeben daher folgende Aussagen:

Satz 12 a. Das Quadrat einer Sehne ist gleich dem Rechteck aus dem (durch ihren Endpunkt gehenden) Durchmesser und der Projektion der Sehne auf denselben.

Satz 16 a. Das Quadrat einer Halbsehne ist gleich dem Rechteck aus den beiden Abschnitten des auf der Sehne senkrechten Durchmessers.

5) Ueber die Anwendung der Flächensätze auf die Bestimmung von Streckengrößen.

Frage 42. Welche rechnermässigen Bestimmungen von Dreieckselementen sind durch die pythagoreischen Sätze und deren Folgerungen ermöglicht?

Erkl. 96. Während die bisherigen Methoden der Elementar-Planimetrie nur die Möglichkeit boten, aus gegebenen Stücken des Dreiecks das ganze Dreieck und damit dessen fehlende Elemente zu konstruieren, also deren Grösse nur aus einer vorliegenden Zeichnung mit Massstab bzw. Winkelmesser abzumessen, so ist es ein wesentliches Ergebnis der pythagoreischen Sätze und deren Folgerungen, dass mittels derselben auch die rechnermässige Bestimmung von Dreieckselementen ermöglicht wird. Dieselbe beschränkt sich allerdings mit Ausnahme des nur ganz allgemeinen Satzes 15 auf Längengrößen, während die rechnermässige Bestimmung von Winkelgrößen im einzelnen der Trigonometrie vorbehalten bleibt.

Antwort. 1) Im rechtwinkligen Dreieck bestehen unter den 7 Grössen a, b, c, h, p, q, F die Gleichungen:

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (Satz 13),}$$

$$a^2 = c \cdot p \text{ (Satz 12), } b^2 = c \cdot q \text{ (Satz 12),}$$

$$h^2 = a^2 - p^2 \text{ (Satz 13 a)} = b^2 - q^2 = p \cdot q \text{ (Satz 16),}$$

$$F = \frac{c \cdot h_c}{2} \text{ (Satz 5 a)} = \frac{a \cdot b}{2} \text{ (siehe Erkl. 41).}$$

Durch diese und andere aus denselben hervorgehenden Zusammenstellungen kann man, wenn ein rechtwinkliges Dreieck durch zwei jener Elemente bestimmt ist, alle andern rechnermässig bestimmen.

2) Im schiefwinkligen Dreieck bestehen unter den 13 Grössen $a, b, c,$

Erkl. 97. Unter den vielen Gleichungen, welche sich zwischen den Stücken des rechtwinkligen oder des schiefwinkligen Dreiecks nach nebenstehendem aufstellen lassen, wäre algebraisch nicht gerade leicht zu untersuchen, welche von einander unabhängig oder abhängig sind, denn man braucht zur Bestimmung von n Unbekannten auch n von einander unabhängige Gleichungen. Da kommt nun die geometrische Erkenntnis zu Hilfe, welche besagt, dass zur Bestimmung des rechtwinkligen Dreiecks ausser dem rechten Winkel noch zwei Stücke, zur Bestimmung des schiefwinkligen Dreiecks aber drei Stücke notwendig sind. Demnach können unter den Gleichungen zwischen den 7 Grössen des rechtwinkligen Dreiecks nur zwei von einander unabhängig sein, unter denen zwischen den 13 Grössen des schiefwinkligen Dreiecks aber nur drei von einander unabhängige Gleichungen.

Erkl. 98. Unter den 7 Grössen des rechtwinkligen Dreiecks lassen sich 21 verschiedene Paare zu zweien bilden; jedesmal sind 5 übrige Grössen zu bestimmen, so dass sich 105 Einzelaufgaben ergeben. Unter den 13 Grössen des schiefwinkligen Dreiecks lassen sich 286 verschiedene Gruppen zu dreien bilden; jedesmal sind 10 übrige Grössen zu bestimmen, so dass sich 2860 Einzelaufgaben ergeben. Einige wenigen, welche die wichtigsten unter diesen sind, werden in den folgenden Fragen und den Aufgaben der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles zur Behandlung gebracht.

Frage 43. Welche Ausdrücke für die Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks erhält man, wenn gegeben sind:

- 1) beide Katheten,
- 2) eine Kathete und die Hypotenuse,
- 3) eine Kathete und die Höhe,
- 4) eine Kathete und der anliegende Höhenabschnitt,
- 5) die Höhe und ein Höhenabschnitt,
- 6) die beiden Höhenabschnitte?

Erkl. 99. Wenn a und h gegeben sind, so findet man zunächst $p^2 = a^2 - h^2$, dann $h^2 = p \cdot q$, also $p = \sqrt{a^2 - h^2}$ und $q = \frac{h^2}{p} = \frac{h^2}{\sqrt{a^2 - h^2}}$. Endlich:

$$b^2 = h^2 + q^2 = h^2 + \frac{h^4}{a^2 - h^2} = \frac{a^2 h^2 - h^4 + h^4}{a^2 - h^2} = \frac{a^2 h^2}{a^2 - h^2}, \text{ folglich } b = \frac{a h}{\sqrt{a^2 - h^2}}.$$

Wenn a und p gegeben sind, so findet man b aus $b^2 = c \cdot q$, worin einzusetzen die Werte

$p_a, b, c, q_a, b, c, h_a, b, c, F$ ebenfalls eine Reihe von Gleichungen, als deren Muster dienen können der allgemeine pythagoreische:

$$a^2 = b^2 + c^2 \mp 2c q_c \text{ (Satz 14),}$$

der Projektionssatz:

$$c \cdot q_c = b \cdot p_b \text{ (Satz 11),}$$

sowie:

$$h_c^2 = a^2 - p_c^2 = b^2 - q_c^2 \text{ (Satz 13a),}$$

$$F = \frac{c h_c}{2} \text{ (Satz 5).}$$

Durch diese und deren entsprechende für andere Seiten sowie durch weitere Zusammenstellungen derselben ist man in der Lage, wenn ein schiefwinkliges Dreieck durch drei der genannten Elemente bestimmt ist, die übrigen rechnungsmässig zu bestimmen.

Antwort. Man erhält nach den in der vorigen Antwort gegebenen Gleichungen folgende Beziehungen:

1) Gegeben a, b :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Satz 13), } h = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ (Erkl. 43),}$$

$$p = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ (S. 12), } q = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ (S. 12),}$$

$$F = \frac{a \cdot b}{2} \text{ (E. 41).}$$

2) Gegeben a und c (oder b und c):

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (S. 13 a), } h = \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (E. 43),}$$

$$p = \frac{a^2}{c} \text{ (S. 12), } q = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} \text{ (S. 12),}$$

$$F = \frac{a}{2} \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (E. 41).}$$

c und q , also $b^2 = \frac{a^2}{p} \cdot \frac{a^2 - p^2}{p} = \frac{a^2}{p^2} (a^2 - p^2)$.

Also $b = \frac{a}{p} \sqrt{a^2 - p^2}$.

Erkl. 100. Sind die Gruppen:

$2(a, c)$ $3(a, h)$ $4(ap)$ $5(hp)$

berechnet, so findet man die entsprechenden:

$2(b, c)$ $3(b, h)$ $4(bq)$ $5(hq)$,

indem man die beiden Katheten oder Hypotenusenabschnitte a, b bzw. p und q mit einander vertauscht, aber Hypotenuse c oder Höhe h unverändert lässt.

Erkl. 101. Die noch übrigen 11 Gruppen $a, q(b, p)$; aF, ch , u. s. w. liefern nicht mehr die obige Einfachheit der Rechnung, sondern verlangen grösstenteils die Auflösung gemischt-quadratischer Gleichungen (s. Aufgabe 175 ff.).

3) Gegeben a und h (oder b und h):

$$b = \frac{a \cdot h}{\sqrt{a^2 - h^2}} \text{ (E. 99), } c = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - h^2}} \text{ (S. 12),}$$

$$p = \sqrt{a^2 - h^2} \text{ (S. 13 a), } q = \frac{h^2}{\sqrt{a^2 - h^2}} \text{ (S. 16).}$$

$$F = \frac{a^2 h}{\sqrt{a^2 - h^2}} \text{ (E. 41).}$$

4) Gegeben a und p (oder b und q , nicht aber a und q oder b und p):

$$b = \frac{a}{p} \sqrt{a^2 - p^2} \text{ (E. 99), } c = \frac{a^2}{p} \text{ (S. 13),}$$

$$q = \frac{a^2 - p^2}{p} \text{ (S. 16), } h = \sqrt{a^2 - p^2} \text{ (S. 13 a),}$$

$$F = \frac{a^2}{2p} \sqrt{a^2 - p^2} \text{ (S. 5).}$$

5) Gegeben h und p (oder h und q):

$$a = \sqrt{h^2 + p^2} \text{ (S. 13 a), } b = \frac{h}{p} \sqrt{h^2 + p^2} (= \sqrt{c \cdot q}),$$

$$c = \frac{h^2 + p^2}{p} \text{ (S. 12), } q = \frac{h^2}{p} \text{ (S. 16),}$$

$$F = \frac{h}{2p} (h^2 + p^2) \text{ (S. 5).}$$

6) Gegeben p und q :

$$a = \sqrt{p(p+q)} \text{ (S. 12), } b = \sqrt{q(p+q)} \text{ (S. 12),}$$

$$c = p + q, h = \sqrt{p \cdot q} \text{ (S. 12),}$$

$$F = \frac{1}{2} (p + q) \sqrt{p \cdot q} \text{ (S. 5).}$$

Frage 44. Welche Ausdrücke ergeben sich beim schiefwinkligen Dreieck, wenn gegeben sind:

1) die drei Seiten a, b, c ,

2) zwei Seiten und die Projektion der einen auf die andere,

3) zwei Seiten und die Höhe auf eine derselben,

4) die zwei Höhenabschnitte einer Seite und eine andere Seite,

5) die zwei Höhenabschnitte einer Seite und die zugehörige Höhe?

Erkl. 102. Unter den oben nicht erwähnten Gruppen wären noch zu nennen als gegeben:

6) zwei Seiten und die Projektion der dritten auf eine von ihnen, z. B. a, c, q_c : dann ist:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2 + 2c q_c}.$$

7) Kennt man aber zwei Seiten und die Projektion einer derselben auf die dritte, also a, b, q_c , so entsteht für c die gemischtquadratische Gleichung $c^2 - 2c q_c + b^2 - a^2 = 0$.

Antwort. Man erhält aus den in Antwort der Frage 42 zusammengestellten Gleichungen folgende Beziehungen:

1) Gegeben a, b, c :

$$q_c = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

und die entsprechenden aus den Gleichungen in Erkl. 84; darnach:

$$h_c = \sqrt{b^2 - q_c^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right)^2}$$

und wieder alle entsprechenden.

2) Gegeben b, c, q_c

(oder b, c, p_b ; oder c, a, q_a oder c, a, p_c ; oder $a b q_b$ oder $a b p_a$):

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2c q_c}, p_c = c - q_c,$$

$$h_c = \sqrt{b^2 - q_c^2}, p_b = \frac{c q_c}{b} \text{ (Satz 11) u. s. w.}$$

Kennt man die Projektion zweier Seiten auf eine andere und eine dieser Seiten, so fällt die Lösung mit (2) zusammen; denn aus b, p_c, q_c , kennt man sofort $c = p_c + q_c$, also b, c, q_c , wie oben. Andere Gruppen gegebener Stücke führen wieder auf gemischt quadratische Gleichungen.

Erkl. 103. Solche Dreiecke, bei welchen in den quadratischen Gleichungen für Seiten und Höhen keine irrationalen, sondern rationale Wurzeln vorkommen, heissen rationale schiefwinklige Dreiecke. Werden die drei Seiten als rationale Zahlen gewählt, und eine der drei Höhen wird ebenfalls rational, dann ist auch der Inhalt als halbes Produkt rational; folglich sind dann auch die andern zwei Höhen rational, da sie aus der Inhaltsgrösse durch Division mit der halben Grundseite hervorgehen. — Man kann solche Dreiecke erhalten durch entsprechende Zusammensetzung zweier pythagoreischen rechtwinkligen Dreiecke. Am längsten bekannt sind solche rationale schiefwinklige Dreiecke, bei welchen eine Seite das arithmetische Mittel der beiden andern ist (die sog. „mittelseitigen“ Dreiecke), z. B. 13, 14, 15. — Eine Zusammenstellung von vielen solchen Dreiecken findet man in Kleyers Lehrbuch der Trigonometrie, noch weitere mehr in einer im Jahre 1864 von Grebe herausgegebenen Schrift: „Zusammenstellung von Stücken rationaler ebener Dreiecke“.

3) Gegeben b, c, h_c (oder andere ähnlich wie oben):

$$q_c = \sqrt{b^2 - h_c^2}, \quad a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2c\sqrt{b^2 - h_c^2}} \\ \text{u. s. w.}$$

4) Gegeben $p_c q_c a$

(oder $p_c q_c b$; oder $p_a q_a b$ oder $p_a q_a c$; oder $p_b q_b c$ oder $p_b q_b a$):

$$h_c = \sqrt{a^2 - p_c^2}, \quad b = \sqrt{h_c^2 + q_c^2}, \quad c = p_c + q_c \\ \text{u. s. w.}$$

5) Gegeben $p_c q_c h_c$

(oder $p_a q_a h_a$ oder $p_b q_b h_b$):

$$c = p_c + q_c, \quad a = \sqrt{h_c^2 + p_c^2}, \quad b = \sqrt{h_c^2 + q_c^2} \\ \text{u. s. w.}$$

Frage 45. Wie lassen sich nach voriger Antwort die drei Höhen des Dreiecks durch die drei Seiten ausdrücken?

Antwort. Wählt man den obigen Ausdruck für h_c , so erhält man der Reihe nach folgende Ausdrücke:

$$h_c^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right)^2$$

Erkl. 104. Man erhält nebenstehend

Durch getrennte Quadrierung des zweiten Gliedes:

$$h^2 = b^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}$$

Durch Gleichnamigmachen des ersten Gliedes:

$$h^2 = \frac{b^2 \cdot 4c^2}{4c^2} - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}$$

Durch Zusammenfassung des ersten Gliedes im Zähler:

$$h^2 = \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}$$

Durch Zerlegung nach der Formel $(m)^2 - (n)^2 = [(m) + (n)] \cdot [(m) - (n)]$:

$$h^2 = \frac{1}{4c^2} \cdot [2bc + (b^2 + c^2 - a^2)] \cdot [2bc - (b^2 + c^2 - a^2)]$$

Durch Ausrechnung der innern Klammern:

$$h^2 = \frac{1}{4c^2} \cdot [2bc + b^2 + c^2 - a^2] \cdot [2bc - b^2 - c^2 + a^2]$$

Durch andere Zusammenfassung der Glieder:

$$h^2 = \frac{1}{4c^2} \cdot [(b^2 + 2bc + c^2) - a^2] \cdot [-(b^2 - 2bc + c^2) + a^2] \\ = \frac{1}{4c^2} [(b + c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - (b - c)^2]$$

Durch nochmalige Zerlegung nach der Formel $(m)^2 - (n)^2 = [(m) + (n)] \cdot [(m) - (n)]$:

$$h^2 = \frac{1}{4c^2} [(b+c) + a] [(b+c) - a] \cdot [a + (b-c)] [a - (b-c)]$$

Durch Ausrechnung der innern Klammern:

$$h^2 = \frac{1}{4c^2} [b+c+a] [b+c-a] [a+b-c] [a-b+c]$$

Durch Umstellung der Klammern und innerhalb der Klammern:

$$h^2 = \frac{1}{4c^2} (a+b+c) (-a+b+c) (a-b+c) (a+b-c)$$

Also durch Radizierung:

$$h_c = \frac{1}{2c} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

Ebenso erhält man:

$$h_a = \frac{1}{2a} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$h_b = \frac{1}{2b} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

Setzt man hierin wieder nach Antwort der Frage 66 im IV. Teile:

$$\frac{a+b+c}{2} = s, \text{ oder } a+b+c = 2s,$$

so wird, wie dort:

$$\frac{-a+b+c}{2} = s-a \text{ oder } -a+b+c = 2(s-a)$$

$$\frac{a-b+c}{2} = s-b \text{ oder } a-b+c = 2(s-b)$$

$$\frac{a+b-c}{2} = s-c \text{ oder } a+b-c = 2(s-c).$$

Demnach wird die jedesmal vorkommende Wurzel:

$$\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \sqrt{2s \cdot 2 \cdot (s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c)},$$

(also, da $\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 = 4$ ist)

$$= 4 \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Man erhält also:

$$h_a = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Erkl. 105. Statt die ersten vier Zeilen nebenstehender Ausführung in dieser Gestalt durchzuführen, kann man auch gleich setzen:

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - q^2 = (b+q)(b-q) = \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) \cdot \left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) \\ &= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c} = \frac{1}{4c^2} (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2), \end{aligned}$$

wie oben Zeile 6.

Andere planimetrische Ableitungen derselben Beziehung für die Höhe finden sich an den einschlägigen Stellen dieses Lehrbuches. Ein trigonometrischer Beweis ist enthalten in Kleyers Lehrbuch der Trigonometrie.

Erkl. 106. Die Ableitung des Ausdruckes für die Höhe h_a oder h_b würde in genau der-

selben Weise stattfinden, wie die nebenstehende für h_c , denn aus den Gleichungen der Erkl. 84 folgt ebenso auch etwa $p_b = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2b}$, also dann:

$$h_b^2 = c^2 - p_b^2 = (c + p_b)(c - p_b) = \frac{1}{4b^2} (2bc + a^2 - b^2 - c^2)(2bc - a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= \frac{1}{4b^2} [a^2 - (b - c)^2] [-a^2 + (b + c)^2] = \frac{1}{4b^2} (a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(-a + b + c),$$

also:

$$h_b = \frac{1}{2b} \sqrt{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}$$

Man erhält aber diese Werte ebenso auch aus der Ableitung des ersten von allen, indem man jeden Buchstaben in jenem Ausdrucke mit dem nachfolgenden bzw. vorhergehenden Buchstaben vertauscht. Dabei geht h_c über in h_a oder h_b , die Bruchfaktoren $\frac{1}{2c}$ in $\frac{1}{2a}$ oder $\frac{1}{2b}$, und die Wurzel verändert sich gar nicht, indem nur die einzelnen Klammerfaktoren in einander übergehen.

In der Uebereinstimmung der Formelausdrücke für die drei Höhen findet man eine Bestätigung der in Antwort der Frage 16 aufgestellten Regel: $h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$, denn beim Ansatz dieser Proportion fällt der stets gleichgrosse Wurzelausdruck fort.

Erkl. 107. Eine etwas veränderte Einleitung vorigen Beweises ist:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq,$$

$$\text{also } 2cq = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\text{dazu } 2cb = 2bc$$

$$\text{also addiert } 2c(b + q) = (b + c)^2 - a^2$$

$$\text{und subtrahiert } 2c(b - q) = -(b - c)^2 + a^2$$

Diese beiden multipliziert, und für:

$$(b + q)(b - q) = b^2 - q^2 = h^2$$

eingesetzt:

$$4c^2 \cdot h^2 = [(b + c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - (b - c)^2],$$

also für h^2 derselbe Ausdruck wie oben Zeile 6 oder Erkl. 105.

Frage 46. Welche Anwendung gestattet die vorige Ableitung für den Inhalt des Dreiecks?

Erkl. 108. Setzt man zur Abkürzung für $\sqrt{(a + b + c) \cdots} = W$, so ist $h_a = \frac{1}{2a} W$, also

$$F = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{a}{2} \cdot h_a = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2a} \cdot W = \frac{1}{4} W.$$

Oder setzt man für $\sqrt{s(s - a) \cdots} = w$, so wird etwa $h_b = \frac{2}{b} \cdot w$, also:

$$F = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{b}{2} \cdot h_b = \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{b} \cdot w = w.$$

$$F = \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}$$

Erkl. 109. Da nach Antwort der Frage 3 eine Fläche eine Grösse zweiter Dimension ist, so muss auch der dafür entstehende Ausdruck algebraisch von zweiter Dimension sein. Nun ist jede der Grösse $s, s - a, \dots a + b + c, \dots$ von der ersten Dimension; das Produkt aller vier also von vierter Dimension; die Wurzel an diesem Produkt von zweiter Dimension. Diese Wurzel ist nach Erkl. 103 bei „rationalen Dreiecken“ nicht irrational, sondern rational. Der Wert von h entsteht aus dieser Wurzel noch durch Division mit einer Länge, wird also dadurch wieder von der ersten Dimension.

Antwort. Setzt man in der Inhalts-

formel $F = \frac{g \cdot h}{2}$ für g eine der drei Seiten und für h den Wert der zugehörigen Höhe ein, so wird jeweils gerade mit demjenigen Faktor multipliziert, dessen reziproker Wert im Ausdruck für h vor der Wurzel mit s steht; dadurch entsteht:

$$F = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

oder:

Erkl. 110. Die in vorstehendem Ausdruck für die Fläche erhaltene Formel heisst die „Heronische Formel“, da sie schon um 200 v. Ch. von dem Alexandriner Mathematiker Hero gefunden sein soll. Sie wird auch der „Satz der drei Brüder“ genannt nach drei arabischen Mathematikern, welche sie angegeben.

Frage 47. Welche Beziehungen entstehen in Rücksicht der Ergebnisse der Antworten der Fragen 15 und 21 zwischen den Seiten und den Grössen h , F , ϱ ?

Antwort. 1) Da man hat $F = \frac{g \cdot h}{2}$ und auch $F = \varrho_0 \cdot s = \varrho_a(s - a) \dots$, so muss z. B.:

$$\frac{c \cdot h_c}{2} = \varrho_0 \cdot s = \varrho_a(s - a) = \varrho_b(s - b) = \varrho_c \cdot (s - c)$$

sein. Demnach ist auch:

$$h_c = \frac{2}{c} \cdot \varrho_0 \cdot s = \frac{2}{c} \cdot \varrho_a(s - a) = \frac{2}{c} \cdot \varrho_b(s - b) = \frac{2}{c} \cdot \varrho_c(s - c)$$

oder in der andern Ausdrucksweise:

$$h_c = \frac{\varrho_0}{c} (a + b + c) = \frac{\varrho_a}{c} (-a + b + c) = \frac{\varrho_b}{c} (a - b + c) = \frac{\varrho_c}{c} (a + b - c).$$

Setzt man aus diesen Formeln die reciproken Werte der h an, so wird:

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2\varrho_s}, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2\varrho_s}, \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2\varrho_s},$$

also:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a + b + c}{2\varrho_s} = \frac{2s}{2\varrho_s} = \frac{1}{\varrho},$$

also:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\varrho_0}.$$

Da ferner auch:

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2\varrho_a(s - a)}, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2\varrho_a(s - a)}, \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2\varrho_a(s - a)},$$

so wird ebenso:

$$-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{-a + b + c}{2\varrho_a(s - a)} = \frac{2(s - a)}{2\varrho_a(s - a)} = \frac{1}{\varrho_a}$$

und ähnlich:

$$\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\varrho_b}, \quad \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\varrho_c}.$$

2) Rückwärts erhält man ebenso:

$$\varrho_0 = \frac{a h_a}{2s} = \frac{a \cdot h_a}{a + b + c} = \frac{b h_b}{a + b + c} \dots$$

$$\varrho_a = \frac{a h_a}{2(s - a)} = \frac{a \cdot h_a}{-a + b + c} = \frac{b h_b}{2(s - a)} = \frac{b h_b}{-a + b + c} \dots$$

Setzt man auch hier die reciproken Werte der Radien an, so wird:

$$\frac{1}{\varrho_a} = \frac{-a + b + c}{b \cdot h_b}, \quad \frac{1}{\varrho_c} = \frac{a + b - c}{b h_b},$$

also:

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{b \cdot h_b} (-a + b + c + a + b - c) = \frac{2b}{b h_b} = \frac{2}{h_b}.$$

Auf gleichem Wege oder auch durch Addition der vorigen Formeln für die reciproken Radien entsteht auch:

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} = \frac{2}{h_c} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{2}{h_a}.$$

3) Endlich erhält man aber auch durch Einsetzung der Werte für h :

$$\begin{aligned} \varrho_0 &= \frac{a}{2s} \cdot \frac{2}{a} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{s} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \varrho_0 &= \frac{a}{a+b+c} \cdot \frac{1}{2a} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}}. \end{aligned}$$

Ebenso entsteht:

$$\begin{aligned} \varrho_a &= \frac{a}{2(s-a)} \cdot \frac{2}{a} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{s-a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}} \end{aligned}$$

oder:

$$\varrho_a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{-a+b+c}}.$$

Erkl. 111. Um einen als Faktor vor einer Quadratwurzel stehenden Ausdruck unter das Wurzelzeichen zu bringen, muss derselbe quadriert werden. Man hat also ausführlich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} &= \sqrt{\frac{1}{s^2} \cdot s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}} = \sqrt{\frac{1}{s} (s-a)(s-b)(s-c)}. \end{aligned}$$

Erkl. 112. Diese letztern Ausdrücke sind für eine einzelne Berechnung in Ziffern bequemer, als die vorhergehenden. Für die Einprägung ins Gedächtnis aber und für übersichtliche Schreibung wie auch für gemeinsame Berechnung aller drei Größen ist es vorteilhaft, die Faktoren vor dem Wurzelzeichen stehen zu lassen und die Ausdrücke folgendermassen im Gedächtniss festzuhalten:

$$\begin{aligned} \varrho_0 &= \frac{1}{s} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \\ \varrho_0 &= \frac{1}{2(a+b+c)} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}; \\ \varrho_a &= \frac{1}{s-a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \\ \varrho_a &= \frac{1}{2(-a+b+c)} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}; \\ \varrho_b &= \frac{1}{s-b} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \\ \varrho_b &= \frac{1}{2(a-b+c)} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}; \end{aligned}$$

$$\varrho_c = \frac{1}{s-c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\varrho_c = \frac{1}{2(a+b-c)} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

Erkl. 113. Es ist leicht, aus den vorigen Ausdrücken zu bewahrheiten, dass wirklich (wie in Antwort 21) entsteht:

$$\varrho_0 \cdot s = \varrho_a \cdot (s-a) = \varrho_b \cdot (s-b) = \varrho_c \cdot (s-c) = F.$$

Man erhält aber auch andere bemerkenswerte Beziehungen zwischen den verschiedenen Grössen ϱ selbst, z. B.:

$$\varrho_0 : \varrho_a : \varrho_b : \varrho_c = \frac{1}{s} : \frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c},$$

$$\varrho_0 \cdot \varrho_a = (s-b)(s-c) \text{ und ähnlich } \varrho_0 \cdot \varrho_b = (s-c)(s-a) \text{ und } \varrho_0 \cdot \varrho_c = (s-a)(s-b),$$

$$\varrho_a \cdot \varrho_b = s(s-c) \text{ und ähnlich } \varrho_a \cdot \varrho_c = s(s-b) \text{ und } \varrho_b \cdot \varrho_c = s(s-a)$$

jeweils durch cyklische Vertauschung. Ferner entsteht:

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\varrho_0},$$

indem man die drei Formeln in (2) addiert. Auch ist dies leicht zu bestätigen durch Einsetzung der Werte in Erkl. 112 und Antwort 45. Ferner erhält man durch Vergleichung der Ausdrücke in Erkl. 112 und 113:

$$\varrho_0 \varrho_a + \varrho_b \varrho_c = (s-b)(s-c) + s(s-a) = 2s^2 - s(a+b+c) + bc = 2s^2 - s \cdot 2s + bc = bc$$

und ebenso:

$$\varrho_0 \varrho_b + \varrho_a \varrho_c = ac \text{ und } \varrho_0 \varrho_c + \varrho_a \varrho_b = ab.$$

Ferner wird:

$$\varrho_a \varrho_b - \varrho_0 \varrho_c = s(s-c) - (s-a)(s-b) = s(a+b-c) - ab$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)(a+b-c) - ab = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

und ebenso:

$$\varrho_b \varrho_c - \varrho_0 \varrho_a = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} \text{ und } \varrho_a \varrho_c - \varrho_0 \varrho_b = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}.$$

Aus diesen beiden Gruppen wieder wird durch Addition:

$$\varrho_0 \varrho_a + \varrho_0 \varrho_b + \varrho_0 \varrho_c + \varrho_a \varrho_b + \varrho_b \varrho_c + \varrho_c \varrho_a = ab + bc + ca$$

und

$$\varrho_a \varrho_b + \varrho_b \varrho_c + \varrho_c \varrho_a - \varrho_0 \varrho_a - \varrho_0 \varrho_b - \varrho_0 \varrho_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Und durch Addition von je zweien:

$$\varrho_0 \varrho_a + \varrho_a \varrho_c - \varrho_0 \varrho_b - \varrho_b \varrho_c = (\varrho_0 + \varrho_c)(\varrho_a - \varrho_b) = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} - \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} = a^2 - b^2$$

und ebenso:

$$(\varrho_0 + \varrho_a)(\varrho_b - \varrho_c) = b^2 - c^2 \text{ und } (\varrho_0 + \varrho_b)(\varrho_c - \varrho_a) = c^2 - a^2.$$

Endlich:

$$\varrho_a \varrho_b + \varrho_b \varrho_c + \varrho_c \varrho_a = s(s-a) + s(s-b) + s(s-c) = s(3s-2s) = s^2,$$

$$\varrho_a \varrho_b \varrho_c = \sqrt{s^3(s-a)(s-b)(s-c)} = s \cdot F = s^2 \cdot \varrho_0; \quad \varrho_0 \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = \frac{1}{F^2} \cdot F^4 = F^2.$$

$$\varrho_0 \varrho_a \varrho_b = \frac{F^2}{\varrho_c} = (s-c)F, \quad \varrho_0 \varrho_b \varrho_c = (s-a)F, \quad \varrho_0 \varrho_c \varrho_a = (s-b)F$$

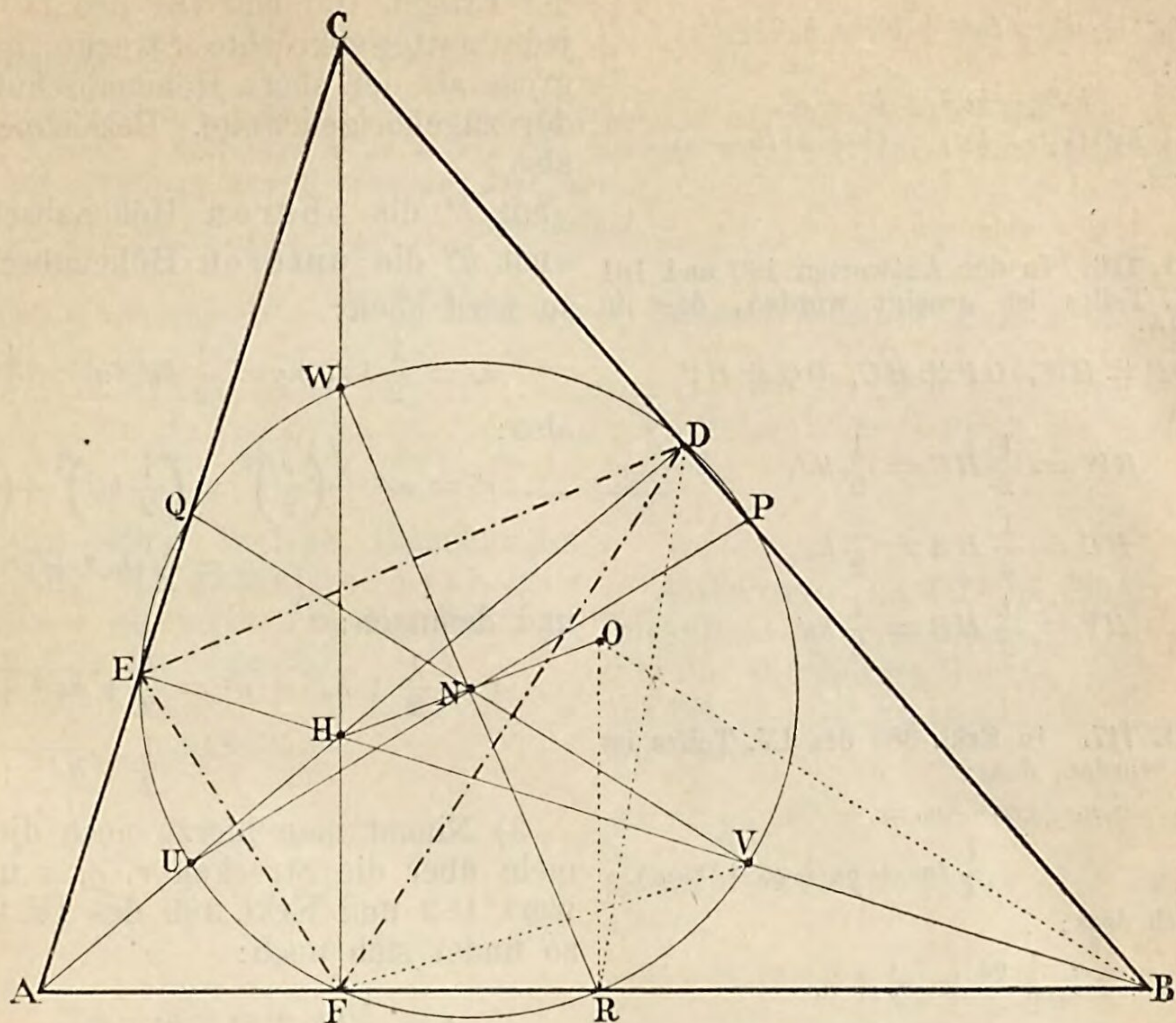
und daraus zusammen:

$$\varrho_0 \varrho_a \varrho_b + \varrho_0 \varrho_b \varrho_c + \varrho_0 \varrho_c \varrho_a = F(3s-2s) = F \cdot s = \varrho_a \varrho_b \varrho_c.$$

Frage 48. Welche Beziehungen bestehen zwischen dem Radius r des Umkreises eines Dreiecks und den übrigen Stücken des Dreiecks?

Antwort. 1) Der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises entsteht als Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten der Seiten. Nennt man also $n_a n_b n_c$ die drei normalen

Figur 40.



Erkl. 114. In Figur 40 ist von den drei Radien $OA = OB = OC$ nur der mittlere gezeichnet und ebenso von den drei Mittelsenkrechten OP, OQ, OR nur die mittlere. Es sind also die Dreiecke analog $BOR \cong AOR$ auch:

$$AOQ \cong COQ \text{ mit } OA = OC = r, OQ = n_b,$$

$$QA = QC = \frac{b}{2}$$

und

$$COP \cong BOP \text{ mit } OC = OB = r, OP = n_a,$$

$$PC = PB = \frac{a}{2}.$$

Erkl. 115. Einzelnen herausgehoben ergibt sich aus nebenstehender Ueberlegung auch die Beziehung:

$$n_a^2 + \frac{a^2}{4} = n_b^2 + \frac{b^2}{4} = n_c^2 + \frac{c^2}{4}$$

oder getrennt:

$$n_a^2 - n_b^2 = \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4},$$

$$(n_a + n_b)(n_a - n_b) = \frac{1}{4}(b + a)(b - a)$$

und die beiden analogen. Dabei muss gegenüberstehen $n_a - n_b$ und $b - a$, nicht $a - b$, denn die grössere Seite hat die kleinere Senkrechte und umgekehrt.

Strecken von den Seitenmitten bis zum Kreismittelpunkte, so bildet der Radius jedesmal ein rechtwinkliges Dreieck mit der halben Seite und dieser Mittelsenkrechten. Man hat nämlich in Figur 40 im Dreieck BOR :

$$BO = r, OR = n_c, RB = \frac{c}{2};$$

also ist nach dem pythagoreischen Lehrsatz:

$$\overline{BO}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{RB}^2$$

oder:

$$r^2 = n_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Ebenso ist aber auch:

$$OP = n_a \text{ und } OQ = n_b,$$

so dass entsteht:

$$r^2 = n_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad r^2 = n_b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

oder:

$$r = \sqrt{n_a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{n_b^2 + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{n_c^2 + \frac{c^2}{4}}.$$

Ebenso erhält man wieder analog dem vorigen:

$$h_a'^2 + a^2 = h_b'^2 + b^2 = h_c'^2 + c^2,$$

woraus:

$$h_a'^2 - h_b'^2 = b^2 - a^2,$$

$$(h_a' + h_b')(h_a' - h_b') = (b + a)(b - a)$$

wie oben.

Erkl. 116. In den Antworten 160 und 161 des IV. Teiles ist gezeigt worden, dass in Figur 40:

$$OR \parallel HW, OP \parallel HU, OQ \parallel HV$$

ist, und

$$HW = \frac{1}{2} HC = \frac{1}{2} h_c',$$

$$HU = \frac{1}{2} HA = \frac{1}{2} h_a',$$

$$HV = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} h_b'.$$

Erkl. 117. In Erkl. 389 des IV. Teiles ist gezeigt worden, dass:

$$r + \varrho_0 = n_a + n_b + n_c =$$

$$\frac{1}{4} (\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c + 3 \cdot \varrho_0),$$

und auch dass:

$$\frac{\varrho_0 + \varrho_a}{2} = n_b + n_c.$$

Letztere Gleichung verdoppelt und von der vorhergehenden abgezogen liefert die letzte der nebenstehenden Formeln.

Erkl. 118. Setzt man in der Formel:

$$2s = a + b + c \text{ für } b = \frac{a h_a}{h_b}, c = \frac{a h_a}{h_c}$$

nach Antwort 16, so wird:

$$2s = a + \frac{a h_a}{h_b} + \frac{a h_a}{h_c} = \frac{a}{h_b h_c} (h_b h_c + h_c h_a + h_a h_b)$$

und analog:

$$2s = \frac{b}{h_c h_a} (h_b h_c + h_c h_a + h_a h_b), \quad 2s = \frac{c}{h_a h_b} (h_b h_c + h_c h_a + h_a h_b)$$

Ebenso entsteht aber auch:

$$-a + b + c = 2(s - a) = \frac{a}{h_b h_c} (-h_b h_c + h_c h_a + h_a h_b) = \frac{b}{h_c h_a} (-h_b h_c + h_c h_a + h_a h_b) =$$

$$= \frac{c}{h_a h_b} (-h_b h_c + h_c h_a + h_a h_b)$$

$$a - b + c = 2(s - b) = \frac{a}{h_b h_c} (h_b h_c - h_c h_a + h_a h_b) = \frac{b}{h_c h_a} (h_b h_c - h_c h_a + h_a h_b)$$

$$= \frac{c}{h_a h_b} (h_b h_c - h_c h_a + h_a h_b)$$

$$a + b - c = 2(s - c) = \frac{a}{h_b h_c} (h_b h_c + h_c h_a - h_a h_b) = \frac{b}{h_c h_a} (h_b h_c + h_c h_a - h_a h_b)$$

$$= \frac{c}{h_a h_b} (h_b h_c + h_c h_a - h_a h_b)$$

2) Nun ist aber nach den Antworten der Fragen 160 und 161 des IV. Teiles jede mittelsenkrechte Strecke halb so gross als der obere Höhenabschnitt auf der zugehörigen Seite. Bezeichnet man also

mit h' die oberen Höhenabschnitte,

mit h'' die unteren Höhenabschnitte,

so wird oben:

$$n_a = \frac{1}{2} h_a', \quad n_b = \frac{1}{2} h_b', \quad n_c = \frac{1}{2} h_c',$$

also:

$$r^2 = n_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} h_c'\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} (h_c'^2 + c^2),$$

und demnach:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{h_a'^2 + a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{h_b'^2 + b^2} = \frac{1}{2} \sqrt{h_c'^2 + c^2}.$$

3) Nimmt man hierzu noch die Formeln über die Strecken r, ϱ, n in Antwort 162 und Erkl. 389 des IV. Teiles, so findet sich noch:

$$r = \frac{1}{4} (\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho_0)$$

und

$$r + \varrho_0 = n_a + n_b + n_c = \frac{1}{2} (h_a' + h_b' + h_c')$$

und

$$r + \varrho_a = n_a - n_b - n_c = \frac{1}{2} (h_a' - h_b' - h_c')$$

sowie die zwei analogen.

Setzt man diese Werte ein in die Formel $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, so entsteht:

$$F = \frac{a^2}{4h_b^2h_c^2} \cdot W = \frac{ah_a}{2} = \frac{b^2}{4h_c^2h_a^2} \cdot W = \frac{bh_b}{2} = \frac{c^2}{4h_a^2h_b^2} \cdot W = \frac{ch_c}{2}, \text{ wo:}$$

$$W = \sqrt{(h_bh_c + h_ch_a + h_ah_b)(-h_bh_c + h_ch_a + h_ah_b)(h_bh_c - h_ch_a + h_ah_b)(h_bh_c + h_ch_a - h_ah_b)}$$

Und hieraus erhält man Werte für die Seiten und für den Flächeninhalt ausgedrückt allein in den Höhen des Dreiecks:

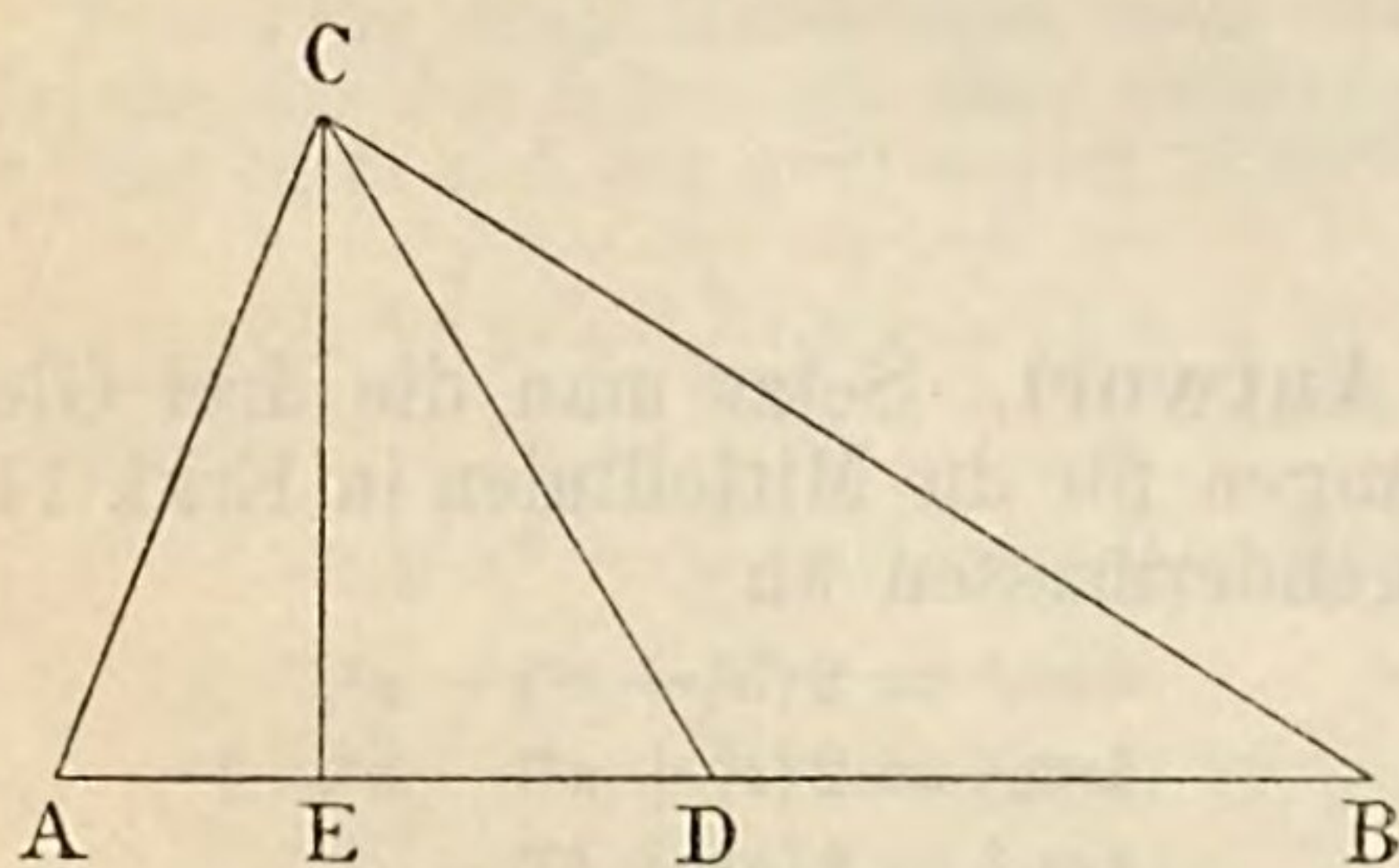
$$a = \frac{2h_a \cdot h_b^2 \cdot h_c^2}{W} = \frac{2}{h_a} \cdot w, \quad b = \frac{2h_b h_c^2 h_a^2}{W} = \frac{2}{h_b} \cdot w, \quad c = \frac{2h_c h_a^2 h_b^2}{W} = \frac{2}{h_c} \cdot w,$$

also durch Einsetzung: $F = \frac{h_a^2 h_b^2 h_c^2}{W} = w$, wo jedesmal wieder W gleich obigem Wurzel-
ausdrucke, dagegen:

$$w = \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}.$$

Frage 49. Welche Beziehungen liefert der allgemeine pythagoreische Lehrsatz für die Mittellinien des Dreiecks?

Figur 41.



Erkl. 119. Ist der Winkel α des Dreiecks ABC ein stumpfer, so bleibt nebenstehender Beweis wörtlich bestehen: Es fällt zwar Punkt E ausserhalb AB über A , aber doch ist ADC bei D spitzwinklig, BDC bei D stumpfwinklig. Es gelten also für alle Gattungen von Dreiecken die Formeln:

$$a^2 + b^2 = 2 \left[m_c^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 \right]$$

$$b^2 + c^2 = 2 \left[m_a^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]$$

$$c^2 + a^2 = 2 \left[m_b^2 + \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right]$$

und einzeln rückwärts ausgedrückt:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(c^2 + a^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

Antwort. Ist CD in Figur 41 die Mittellinie m_c des Dreiecks ABC und CE die zugehörige Höhe h_c , so ist ADC ein bei D spitzwinkliges Dreieck mit Seiten:

$AD = \frac{c}{2}$, $AC = b$, $CD = m_c$ und $DE = p_c$,
nämlich Projektion von CD auf AB ,
also:

$$b^2 = m_c^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot ED.$$

Ferner ist BCD ein bei D stumpfwinkliges Dreieck mit Seiten:

$BD = \frac{c}{2}$, $BC = a$, $CD = m_c$ und $DE = q_c$,
nämlich Projektion von CD auf AB ,
also:

$$a^2 = m_c^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 + 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot ED.$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, so fällt $\pm 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot ED$ fort, und man behält:

$$a^2 + b^2 = 2 \left[m_c^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 \right],$$

also die Aussage:

Satz 17. Die Summe der Quadrate zweier Dreiecksseiten ist gleich der doppelten Summe der Quadrate der halben dritten Seite und deren zugehöriger Mittellinie.

Und für m_c selbst erhält man aus jener Gleichung:

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{c}{2} \right)^2$$

oder:

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

Erkl. 120. Die Entstehung der letzten der nebenstehenden Formeln ergibt sich folgendermassen:

$$\begin{aligned}\frac{a^2 + b^2}{2} &= m^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2, \\ m^2 &= \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \\ &= \frac{1}{4} [2(a^2 + b^2) - c^2].\end{aligned}$$

Erkl. 121. Die Ueberlegung am Schlusse der nebenstehenden Antwort lässt sich in einem geometrischen Ortssatze zusammenfassen wie folgt:

Satz. Der geometrische Ort für einen Punkt, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten A und B eine bestimmte Quadratsumme S ergeben, ist der Kreis, welcher den Mittelpunkt von AB zum Mittelpunkt und die Grösse $m = \frac{1}{2} \sqrt{2S - c^2}$ zum Radius hat.

Frage 50. Welche Gleichungen zwischen den drei Mittellinien untereinander ergeben sich aus der vorigen Antwort?

Erkl. 122. Als Zusammenfassung der nebenstehenden Gleichungen zu dreien erhält man:

$$4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2),$$

indem rechts z. B.:

$$-a^2 + 2a^2 + 2a^2 = 3a^2$$

entsteht. Folglich einzeln:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

und:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2).$$

$$1) \quad 4m_a^2 - 4m_b^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 - 2c^2 - 2a^2 + b^2 = 3b^2 - 3a^2,$$

also:

$$m_a^2 - m_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2).$$

$$2) \text{ Oder: } 4m_a^2 + 2 \cdot 4m_b^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 + 4c^2 + 4a^2 - 2b^2 = 6c^2 + 3a^2,$$

also:

$$m_a^2 + 2m_b^2 = \frac{3}{4}(2c^2 + a^2).$$

$$3) \text{ Endlich: } 2(4m_a^2 + 4m_b^2) - 4m_c^2 =$$

$$4b^2 + 4c^2 - 2a^2 + 4c^2 + 4a^2 - 2b^2 - 2a^2 - 2b^2 + c^2 = 9c^2,$$

also:

$$2(m_a^2 + m_b^2) - m_c^2 = \frac{9}{4}c^2.$$

4) Berechnet man hiernach die Fläche des Dreiecks aus den drei Mittellinien statt aus den drei Seiten, indem man in der Formel für F die Werte einsetzt, so entsteht (siehe Erkl. 124):

$$F = \frac{1}{3} \sqrt{(m_a + m_b + m_c)(-m_a + m_b + m_c)(m_a - m_b + m_c)(m_a + m_b - m_c)}.$$

Da in diesen Formeln die Grössen a^2 und b^2 nur in der geschlossenen Gruppe $a^2 + b^2$ vorkommen, so müssen dieselben gelten für alle Dreiecke, in welchen die Strecken c und m_c gleiche Grösse haben, deren Spitzen also auf dem um D mit Radius m_c errichteten Kreise liegen.

(Man vergleiche den Satz in Erkl. 95 als besonderen Fall des allgemeineren Satzes in Erkl. 121 für diese Beziehung.)

Und ersetzt man hierin wieder, analog wie oben:

$$m_a + m_b + m_c = 2 \cdot \sigma \quad \text{oder} \quad \sigma = \frac{m_a + m_b + m_c}{2},$$

so wird:

$$F = \frac{4}{3} \sqrt{\sigma(\sigma - m_a)(\sigma - m_b)(\sigma - m_c)}.$$

Erkl. 123. Die Gruppen der obenstehenden Formeln zu je dreien lauten:

$$\begin{aligned} m_a^2 - m_b^2 &= \frac{3}{4}(b^2 - a^2), & m_a^2 + 2m_b^2 &= \frac{3}{4}(2c^2 + a^2), & 2(m_a^2 + m_b^2) - m_c^2 &= \frac{9}{4}c^2; \\ m_b^2 - m_c^2 &= \frac{3}{4}(c^2 - b^2), & m_b^2 + 2m_c^2 &= \frac{3}{4}(2a^2 + b^2), & 2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2 &= \frac{9}{4}a^2; \\ m_c^2 - m_a^2 &= \frac{3}{4}(a^2 - c^2), & m_c^2 + 2m_a^2 &= \frac{3}{4}(2b^2 + c^2), & 2(m_c^2 + m_a^2) - m_b^2 &= \frac{9}{4}b^2. \end{aligned}$$

Aus der erstern folgt wieder einzeln:

$$(m_a + m_b)(m_a - m_b) = 3 \left(\frac{b+a}{2} \right) \left(\frac{b-a}{2} \right); \text{ und die zwei analogen.}$$

Und daraus wieder ist zu entnehmen, weil $m_a - m_b$ und $b - a$, nicht $a - b$, gegenüberstehen, dass zur kürzeren Seite die längere Mittellinie gehört und umgekehrt.

Man kann obige Gleichungen auch rückwärts auflösen und daraus jeweils einen Ausdruck für eine der drei Seiten aus einer zweiten und ihren beiden zugehörigen Mittellinien bzw. einer zweiten Seite und den zwei andern Mittellinien herleiten:

$$a = \sqrt{b^2 - \frac{4}{3}(m_a^2 - m_b^2)} = \sqrt{c^2 - \frac{4}{3}(m_a^2 - m_c^2)} = \sqrt{\frac{4}{3}(m_a^2 + 2m_b^2) - 2c^2},$$

$$b = \sqrt{c^2 - \frac{4}{3}(m_b^2 - m_c^2)} = \sqrt{a^2 - \frac{4}{3}(m_b^2 - m_a^2)} = \sqrt{\frac{4}{3}(m_b^2 + 2m_c^2) - 2a^2},$$

$$c = \sqrt{a^2 - \frac{4}{3}(m_c^2 - m_a^2)} = \sqrt{b^2 - \frac{4}{3}(m_c^2 - m_b^2)} = \sqrt{\frac{4}{3}(m_c^2 + 2m_a^2) - 2b^2},$$

und ebenso aus der dritten Gruppe für die Seiten aus den drei Mittellinien allein:

$$a = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}, \quad b = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_c^2 + m_a^2) - m_b^2},$$

$$c = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_a^2 + m_b^2) - m_c^2}.$$

Erkl. 124. Die Umrechnung aus dem Flächenausdruck in den Seiten nach jenem in Mittellinien geschieht am besten, nachdem man den Ausdruck:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

umgerechnet hat in:

$$F = \frac{1}{4} \sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4},$$

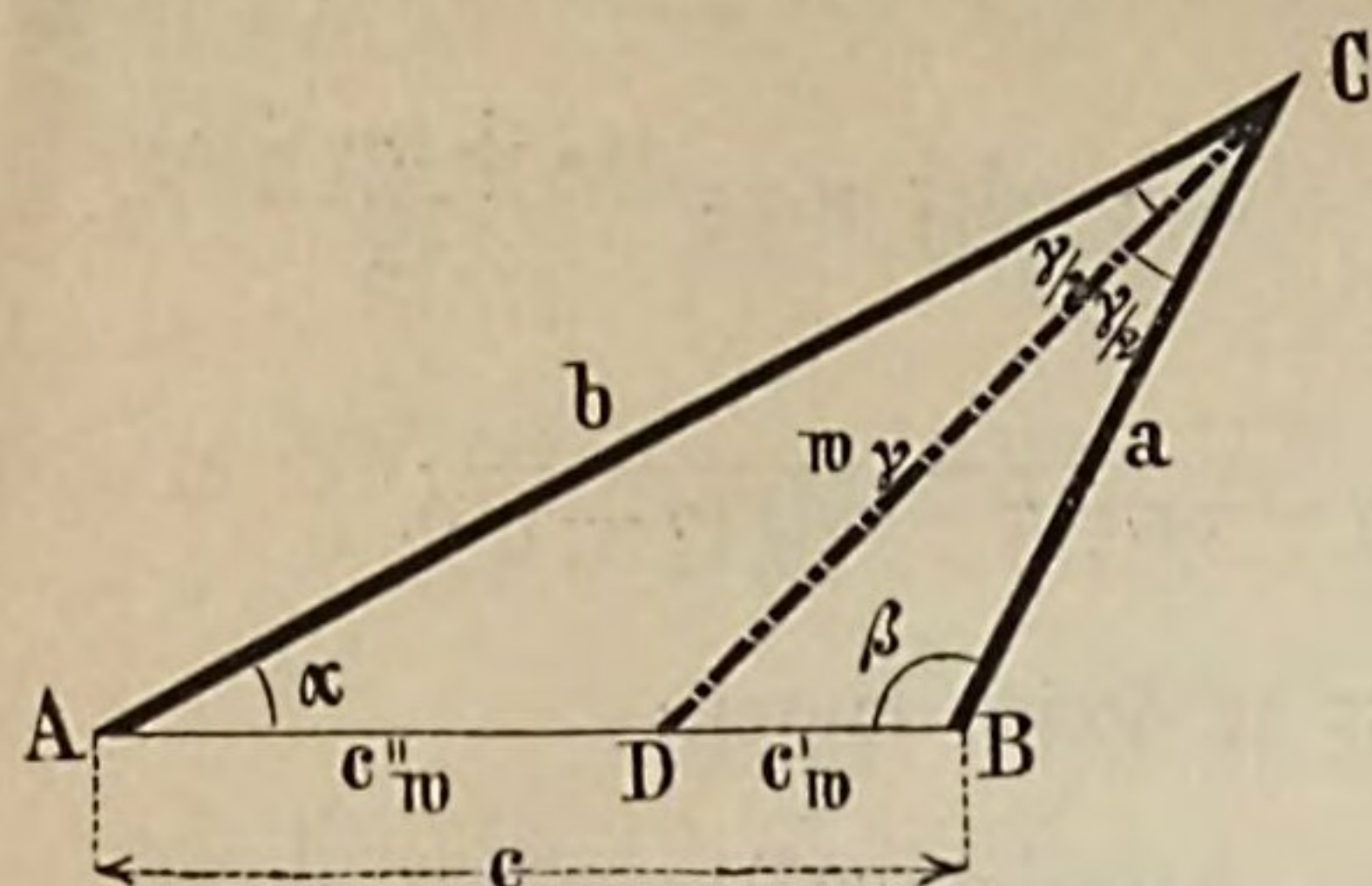
dadurch, dass man hierin die Werte für die Quadrate aus obigen Formeln einsetzt und so erhält:

$$\begin{aligned} F &= \frac{4}{3} \sqrt{2m_a^2m_b^2 + 2m_b^2m_c^2 + 2m_c^2m_a^2 - m_a^4 - m_b^4 - m_c^4} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{\sigma(\sigma - m_a)(\sigma - m_b)(\sigma - m_c)}. \end{aligned}$$

Frage 51. Welchen Wert erhält man für eine beliebige Transversale durch einen der Winkelscheitel des Dreiecks?

Antwort. Bezeichnet $CD = W_\gamma$ in Figur 42 und 43 eine beliebige Trans-

Figur 42.



Erkl. 125. In Figur 42 ist w_γ als Winkelhalbierende des Winkels γ gezeichnet, um daran später die Beziehungen für diese Strecke abzuleiten. Es werden sich nämlich besondere Werte für die Größen c' , c'' ableiten lassen, welche dann genauere Ausführung der nebenstehenden Formeln gestatten.

Erkl. 126. Der in nebenstehenden Formeln aufgestellte Satz ist zuerst gegeben worden von „Stewart“ und ist daher nach diesem benannt. In demselben sind als besondere Fälle enthalten die oben schon gefundenen Sätze für Mittellinien und Höhen. Es ist nämlich für:

$$m_c \dots c' = c'' = \frac{c}{2},$$

also:

$$m_c^2 = \frac{a^2 \cdot c + b^2 \cdot c}{2c} - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4},$$

wie oben gefunden. Für h_c aber ist:

$$c' = p_c, \quad c'' = q_c,$$

also:

$$h_c = \frac{a^2 \cdot q + b^2 \cdot p}{c} - pq.$$

Setzt man hierin:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq,$$

so wird:

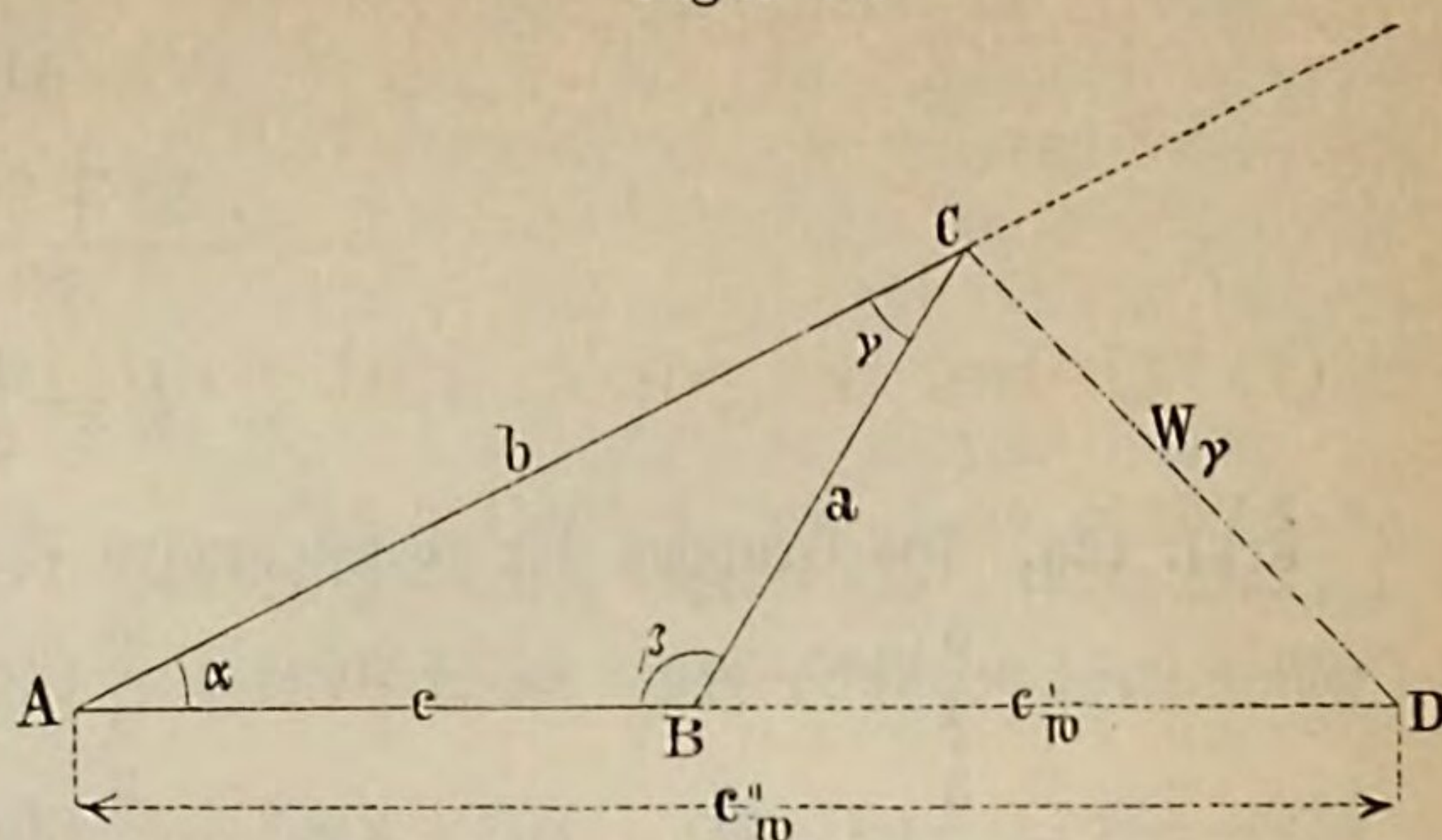
$$\begin{aligned} h_c &= \frac{1}{c} (b^2 q + c^2 q - 2cq^2 + b^2 p - cpq) \\ &= \frac{1}{c} [b^2 (q + p) + c^2 q - cq^2 - cq(q + p)] \\ &= \frac{1}{c} (b^2 c + c^2 q - cq^2 - c^2 q) \\ &= \frac{1}{c} (b^2 c - cq^2) = b^2 - q^2. \end{aligned}$$

Erkl. 127. Führt man den Beweis für Figur 43 einzeln aus, so entsteht:

$$W_\gamma = \frac{a^2 c'' - b^2 c' + c \cdot c' \cdot c''}{c},$$

also durch Ueberführung der Zeichen, analog Erkl. 89, beim pythagoreischen Satze: c' als

Figur 43.



versale durch den Eckpunkt C , so entstehen auf der Gegenseite c zwei Abschnitte:

$$BD = c_w', \quad AD = c_w'',$$

und diese bilden die Dreiecke BDC mit Seiten a , W_γ , c' und ADC mit Seiten b , w_γ , c'' . Bezeichnet man nun mit x das Stück der Grundseite c , auf welches sich w projiziert (also den Abstand von D bis zum Fusspunkt der Höhe h_c), so erhält man nach dem erweiterten pythagoreischen Lehrsatz in Figur 42 (bezw. 43):

$$\begin{aligned} a^2 &= w^2 + c'^2 - 2x \cdot c', \\ b^2 &= w^2 + c''^2 + 2x \cdot c'', \end{aligned}$$

also durch Addition der mit c'' bzw. c' erweiterten Gleichungen:

$$\begin{aligned} a^2 \cdot c'' &= w^2 \cdot c'' + c'^2 \cdot c'' - 2x \cdot c' \cdot c'' \\ b^2 \cdot c' &= w^2 \cdot c' + c''^2 \cdot c' + 2x \cdot c' \cdot c'' \end{aligned}$$

$$a^2 \cdot c'' + b^2 \cdot c' = w^2 (c'' + c') + c'^2 c'' + c''^2 c'$$

oder:

$$a^2 c'' + b^2 c' = w^2 (c'' + c') + c' \cdot c'' (c'' + c')$$

Nun ist in Figur 42:

$$c'' + c' = c,$$

in Figur 43:

$$c'' - c' = c,$$

also entsteht für die Figur 42:

$$a^2 c'' + b^2 c' = w^2 \cdot c + c' \cdot c'' \cdot c$$

oder:

$$\begin{aligned} w_\gamma^2 &= \frac{a^2 c'' + b^2 c' - c \cdot c' \cdot c''}{c} \\ &= \frac{a^2 c'' + b^2 c'}{c} - c' \cdot c''; \end{aligned}$$

und ebenso:

$$\begin{aligned} w_\alpha^2 &= \frac{b^2 a'' + c^2 a' - a \cdot a' \cdot a''}{a} \\ &= \frac{b^2 a'' + c^2 a'}{a} - a' \cdot a'', \end{aligned}$$

negative Grösse, weil nach der Aussenseite des Dreiecks gerichtet, wie nebenstehend:

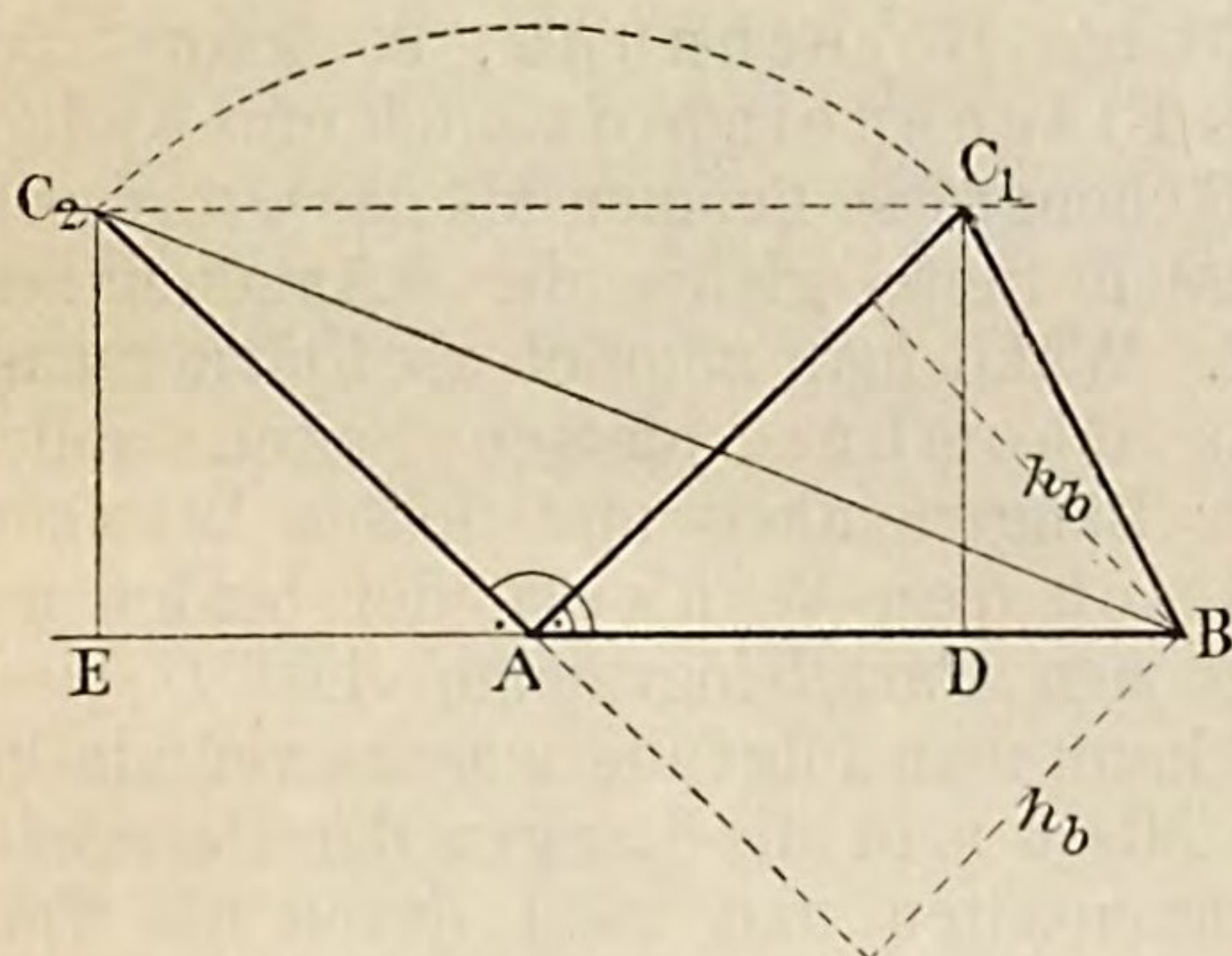
$$W_\gamma = \frac{a^2 c'' + b^2 c' - c \cdot c' \cdot c''}{c}.$$

$$\begin{aligned} w\beta^2 &= \frac{c^2 b'' + a^2 b' - b \cdot b' \cdot b''}{b} \\ &= \frac{c^2 b'' + a^2 b'}{b} - b' \cdot b''. \end{aligned}$$

6) Ueber Figuren mit gegebenen Winkelbeziehungen.

Frage 52. Wie verhalten sich die Flächeninhalte von Dreiecken, bei welchen zwei Seiten gleich und die eingeschlossenen Winkel supplementär sind?

Figur 44.



Erkl. 128. Legt man die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 statt mit AB mit AC aufeinander, so kommen die Punkte B_1 und B_2 auf einen Kreisbogen um A zu liegen und auf eine Parallele zu AC , also werden die von B_1 und B_2 auf b gefällten Höhen ebenfalls gleichgross.

Man kann daher folgende Aussage machen:

Satz. Wenn in zwei Dreiecken supplementäre Winkel von gleichgrossen Seiten eingeschlossen werden, so haben die Dreiecke gleichen Inhalt und zu den gleichen Seiten auch gleiche zugehörige Höhen.

Frage 53. Wie verhalten sich die Flächeninhalte von Dreiecken, welche einen Winkel gleich haben?

Erkl. 129. Während die Fläche einer gewöhnlichen Figur in Quadrateinheiten ausgedrückt wird, ist in nebenstehender Ausführung eine Fläche von Rhombusgestalt als Masseinheit gewählt. Es kann jede beliebige Fläche als Masseinheit gewählt werden, solange die Zahlenwerte nicht untereinander verwechselt werden. Nur wenn die Zahlenwerte in Betracht kommen, ist es erforderlich, dass alle Grössen mit gleichem Masse gemessen werden. Im nebenstehenden Beweise werden aber zwei Flächen

Antwort. Sind ABC_1 und ABC_2 in Figur 44 zwei Dreiecke, in welchen:

$$AB = AB, \quad AC_2 = AC_1,$$

$$\sphericalangle BAC_2 = 180^\circ - \sphericalangle BAC_1,$$

so müssen C_1 und C_2 auf einem um A beschriebenen Kreisbogen liegen. Fällt man dann von C_1 und C_2 die Höhen auf c , so wird im Dreieck AC_2E :

$$\sphericalangle EAC_2 = 180^\circ - \sphericalangle BAC_2,$$

also $= \sphericalangle DAC_1$ sein.

Demnach haben diese Dreiecke gleichen Winkel, und die Seiten $AC_1 = AC_2$, also ist:

$$\triangle ADC_1 \cong \triangle AEC_2 \text{ und } EC_2 = DC_1.$$

Daher haben die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 nicht nur gleiche Grundseite AB , sondern auch gleiche Höhe $C_1D = C_2E$, sind also inhaltsgleich.

(Die Schlussfolge mit den Winkeln konnte auch so geschehen:

$$\sphericalangle C_1AB = 180^\circ - \sphericalangle C_2AB,$$

$$\begin{aligned} \sphericalangle C_2C_1A &= \sphericalangle C_1C_2A = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle C_2AC_1) \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle C_2AB + \sphericalangle C_1AB) \\ &= \frac{1}{2}(\sphericalangle C_1AB + \sphericalangle C_1AB) = \sphericalangle C_1AB. \end{aligned}$$

Folglich:

$$C_1C_2 \parallel AB \text{ und } C_1D = C_2E.)$$

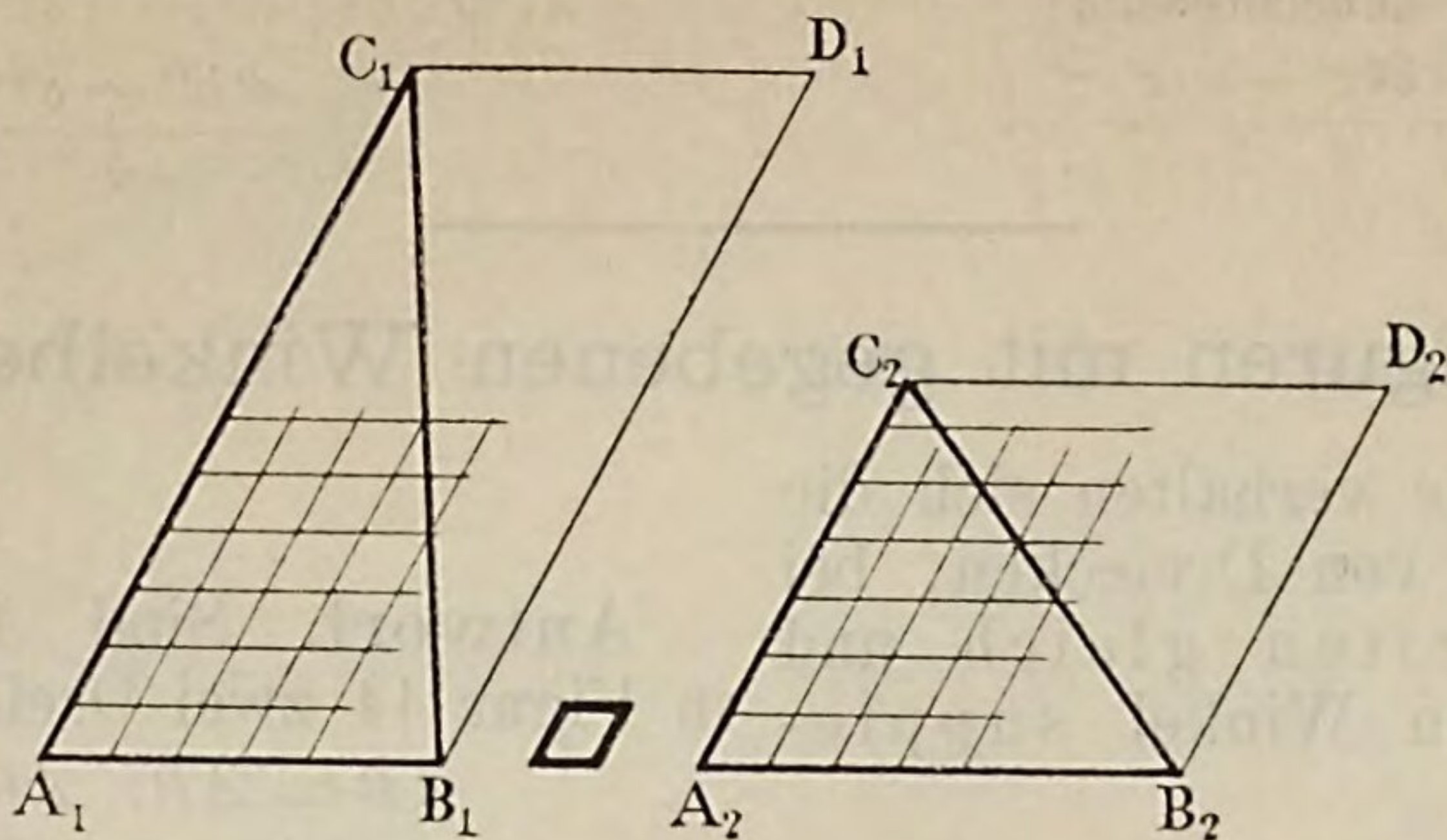
Antwort. Sind $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ (s. Figur 45) zwei Dreiecke, in welchen $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle B_2A_2C_2$ ist, so ist jedes Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms $A_1B_1C_1D_1$ bzw. $A_2B_2C_2D_2$, in welchen nunmehr sämtliche Winkel entsprechend gleichgross sind, nämlich:

$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2 = \sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2,$$

$$\sphericalangle B_1 = 180^\circ - \sphericalangle A_1 = \sphericalangle C_1 = \sphericalangle B_2 = \sphericalangle C_2.$$

Da es sich nun hier nur um die Vergleichung der beiden Flächeninhalte

Figur 45.



mit gleichem Masse gemessen, die Ergebnisse verglichen und daraus ein allgemeines Ergebnis erreicht.

Erkl. 130. Die Bestimmung des Flächeninhalts des Dreiecks war bei der gewöhnlichen Untersuchung ebenfalls durch Darstellung als Hälfte eines Parallelogramms bzw. Rechtecks geschehen. Die gegenwärtige Bestimmungsweise fällt mit jener zusammen, wenn der Winkel ein Rechter ist. Denn dann wird das Rhombus zum Quadrat, die Dreiecke sind rechtwinklig. Dass rechtwinklige Dreiecke sich verhalten wie die Produkte der beiden Katheten, folgt schon aus dem früheren Satze, dass die Fläche gleich ist dem halben Produkte der Katheten; also verhalten sich verschiedene eben wie diese Produkte.

handelt, nicht aber um deren ziffern-mässige Berechnung, so kann man als Flächeneinheit auch eine andere Flächengrösse nehmen als das Quadrat, dessen Seite gleich der Längeneinheit ist. Wählt man nämlich als Flächenmass das Rhombus, dessen Seiten gleich der Längeneinheit und dessen Winkel gleich den Winkeln der beiden gegebenen Parallelogramme $ABCD$ sind, so kann man folgendermassen verfahren:

Misst man die Längen der Parallelogrammseiten und zieht durch die Teilpunkte Parallelen zu den Nachbarseiten, so wird jedes Parallelogramm zerlegt in eine Anzahl von Streifen, deren Länge gleich der Länge der einen Seite, und von denen jeder Streifen so viele Rhombenflächen enthält, als die Länge der andern Seite. Ausgedrückt in diesen Flächeneinheiten ist also die Fläche des einen Parallelogramms $a_1 \cdot b_1$, die des andern $a_2 \cdot b_2$. Die Flächen der gegebenen Dreiecke sind also, ausgedrückt in denselben Rhombusflächen:

$$F_1 = \frac{1}{2} a_1 \cdot b_1 \text{ bzw. } F_2 = \frac{1}{2} a_2 \cdot b_2.$$

Bildet man nun den Quotienten dieser beiden Dreiecksflächen, so fällt die Massgrösse ganz weg, und es bleibt:

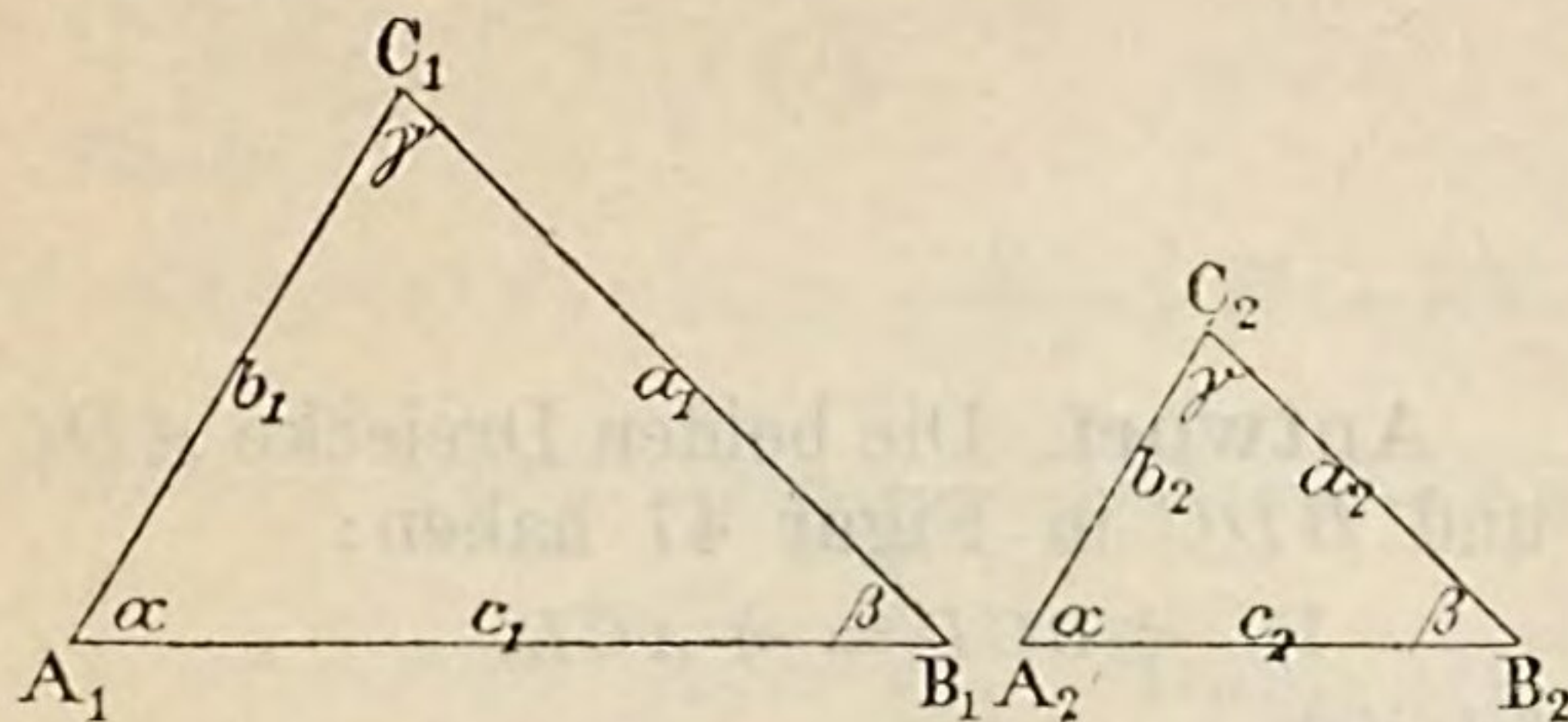
$$F_1 : F_2 = \frac{1}{2} a_1 \cdot b_1 : \frac{1}{2} a_2 \cdot b_2 = a_1 b_1 : a_2 b_2.$$

Man erhält also die Aussage:

Satz 18. Die Flächeninhalte zweier Dreiecke mit einem gleichen Winkel verhalten sich wie die Produkte der zwei den gleichen Winkel einschliessenden Seiten.

Frage 54. Wie gestaltet sich das vorige Ergebnis für Dreiecke mit drei gleichen Winkeln?

Figur 46.



Erkl. 131. Man kann in einer Proportion die inneren Glieder vertauschen, ohne die Gleichheit beider Seiten aufzuheben. Auch kann man eine Proportion in Bruchform schreiben, da ja eine Proportion nur die Gleichheit zweier Brüche bzw. Quotienten darstellt. Aus der Schreibung in Bruchform lassen sich die Eigenschaften des Kürzens, Vertauschens u. s. w. am leichtesten beweisen.

Erkl. 132. Dreiecke mit drei gleichen Winkeln werden ähnliche Dreiecke genannt. Genauere Betrachtung derselben erfolgt im siebenten Teile dieses Lehrbuches. Hier aber schon erhält man nebenstehenden Satz, sowie, weil $b_1 c_1 : b_2 c_2 = a_1 c_1 : a_2 c_2 = a_1 b_1 : a_2 b_2$, auch die Beziehung:

$$\begin{aligned} & a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2 \\ \text{oder:} & a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2, \\ \text{also in Bruchform:} & \end{aligned}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Antwort. Ist in den Dreiecken $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ der Figur 46:

$$1) \angle \alpha_1 = \alpha_2,$$

so hat man:

$$F_1 : F_2 = b_1 c_1 : b_2 c_2;$$

$$2) \angle \beta_1 = \beta_2,$$

so hat man:

$$F_1 : F_2 = a_1 c_1 : a_2 c_2.$$

Demnach muss:

$$a_1 c_1 : a_2 c_2 = b_1 c_1 : b_2 c_2$$

oder:

$$a_1 c_1 : b_1 c_1 = a_2 c_2 : b_2 c_2$$

sein.

Durch Kürzung mit c_1 bzw. c_2 erhält man:

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2$$

oder:

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2$$

oder in Bruchform:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Nun ist:

$$3) \gamma = \gamma_1,$$

also:

$$F_1 : F_2 = a_1 b_1 : a_2 b_2 = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2}.$$

Setzt man hier das vorige ein, so wird:

$$F_1 : F_2 = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}.$$

Satz 19. In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Flächen wie die Quadrate je zweier entsprechenden Seiten, und sind daher die Quotienten je zweier entsprechenden Seiten gleichgross.

Frage 55. Welche Erweiterung erfährt Satz 18 in Rücksicht des Ergebnisses der Antwort von Frage 52?

Erkl. 133. Das Entscheidende bei nebenstehender Ueberlegung ist, dass bei der Vertauschung des Winkels mit dem supplementären die beiden Seiten gleichgross bleiben, deren Produkt in Satz 18 bestimmend auftritt. Man kann also sagen:

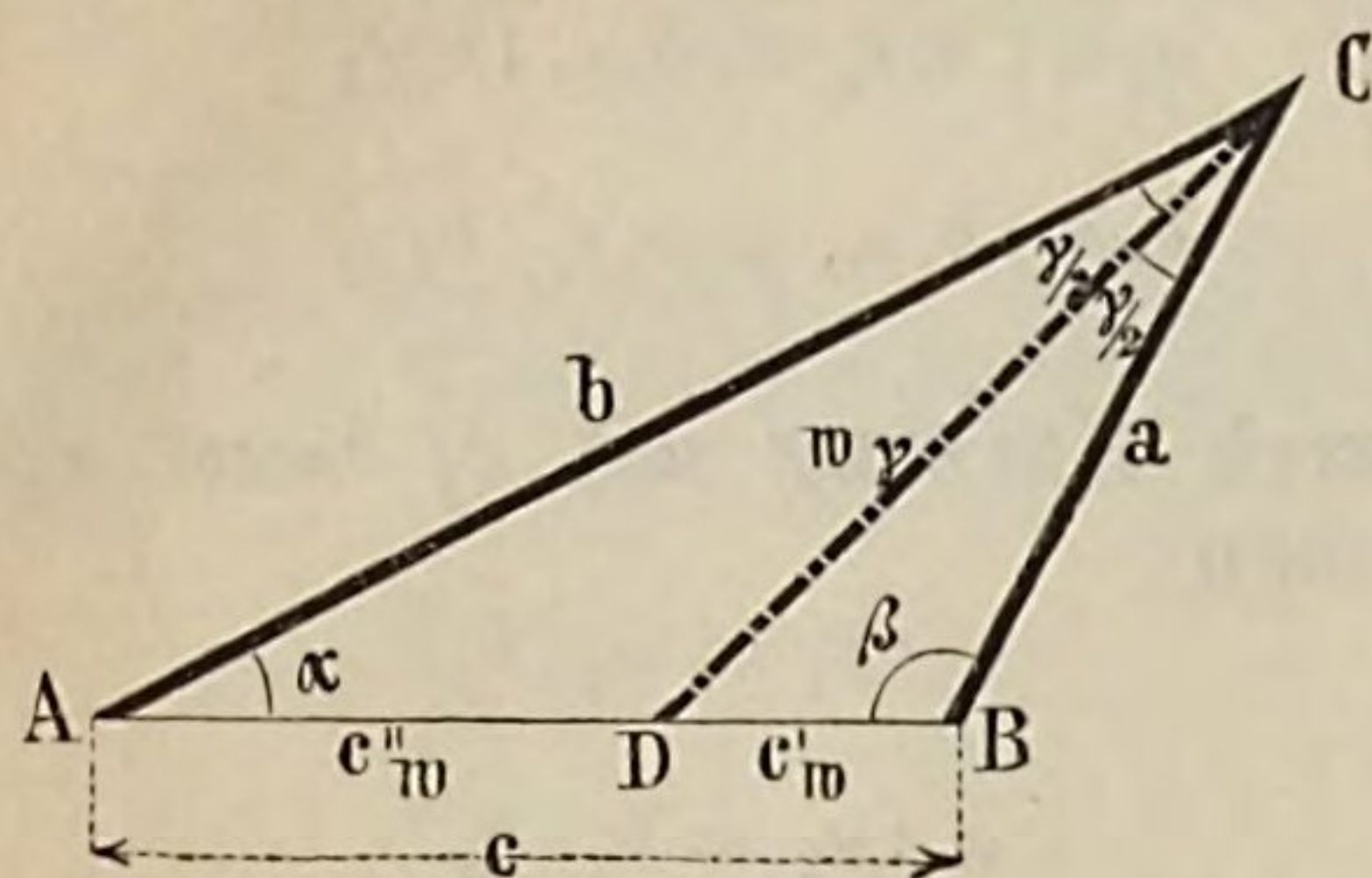
Satz 18a. Dreiecke mit einem gleichen oder supplementären Winkelpaare verhalten sich wie

Antwort. Da nach Antwort der Frage 52 ein Dreieck mit einem spitzen Winkel gleichgross ist einem Dreieck mit supplementärem Winkel zu jenem, so muss sich Satz 18 auch auf solche ausdehnen lassen. Denn hat man zwei Dreiecke mit einem supplementären Winkelpaar, so kann man das eine vertauschen mit einem andern, welches dieselben einschliessenden Seiten,

die Produkte der diese Winkel einschliessenden Seiten. aber den supplementären Winkel hat; und für das so erhaltene Paar von Dreiecken gilt Satz 18.

Frage 56. Welches Ergebnis für die Winkelhalbierenden eines Dreieckswinkels erhält man auf Grund der Sätze 18 und 18a?

Figur 47.



Erkl. 134. Das nebenstehende Ergebnis lässt sich in dem Satze aussprechen:

Die auf einer Dreiecksseite durch die Winkelhalbierenden gebildeten Abschnitte verhalten sich wie die anliegenden Seiten.

Darin sind enthalten die Gleichungen:

$$a' : a'' = b : c \text{ oder } b \cdot a'' = c \cdot a',$$

$$b' : b'' = c : a \text{ oder } c \cdot b'' = a \cdot b',$$

$$c' : c'' = a : b \text{ oder } a \cdot c'' = b \cdot c'.$$

Antwort. Die beiden Dreiecke ADC und BDC in Figur 47 haben:

$$1) \angle BCD = \angle ACD,$$

folglich:

$$F_1 : F_2 = a \cdot w : b \cdot w;$$

$$2) \angle BDC = 180^\circ - \angle ADC,$$

folglich:

$$F_1 : F_2 = c' \cdot w : c'' \cdot w.$$

Man erhält also:

$$a \cdot w : b \cdot w = c' \cdot w : c'' \cdot w$$

oder:

$$c' : c'' = a : b.$$

Dadurch wird, zusammengenommen mit der Gleichung $c' + c'' = c$:

$$c' = \frac{a \cdot c}{a + b}, \quad c'' = \frac{b \cdot c}{a + b}$$

und eingesetzt in die Gleichungen der Antwort auf Frage 51:

$$w_\gamma^2 = \frac{1}{c} \left(\frac{a^2 \cdot b \cdot c}{a + b} + \frac{b^2 \cdot a \cdot c}{a + b} \right) - \frac{a \cdot c \cdot b \cdot c}{(a + b)(a + b)},$$

$$w_\gamma^2 = \frac{abc(a + b)}{c(a + b)} - \frac{a \cdot b \cdot c^2}{(a + b)^2} = ab - \frac{abc^2}{(a + b)^2}.$$

Hiefür kann man schreiben:

$$w_\gamma^2 = ab \left[1 - \left(\frac{c}{a + b} \right)^2 \right] = ab \left(1 + \frac{c}{a + b} \right) \left(1 - \frac{c}{a + b} \right),$$

$$w_\gamma^2 = ab \cdot \frac{a + b + c}{a + b} \cdot \frac{a + b - c}{a + b} = \frac{ab}{(a + b)^2} (a + b + c)(a + b - c),$$

$$w_\gamma^2 = \frac{ab}{(a + b)^2} \cdot 2s \cdot 2(s - c) = \frac{4ab}{(a + b)^2} \cdot s(s - c),$$

also:

$$w_\gamma = \frac{2}{a + b} \cdot \sqrt{a \cdot b \cdot s(s - c)} = \frac{1}{a + b} \sqrt{a \cdot b \cdot (a + b + c)(a + b - c)}.$$

Will man umgekehrt eine Seite ausdrücken aus einer Winkelhalbierenden und deren zugehörigen Seitenabschnitten, so erhält man aus $w_\gamma^2 = ab - c'c''$ durch Einsetzung von $b = \frac{c''}{c'} \cdot a$:

$$w_\gamma^2 = a \cdot \frac{c''}{c'} \cdot a - c'c'',$$

Erkl. 135. Die Gleichungen der nebenstehenden Ueberlegungen bilden folgende Gruppen:

$$a' = \frac{ba}{b+c}, \quad b' = \frac{cb}{c+a}, \quad c' = \frac{ac}{a+b};$$

$$a'' = \frac{ca}{b+c}, \quad b'' = \frac{ab}{c+a}, \quad c'' = \frac{bc}{a+b}.$$

Ferner:

$$w_{\alpha}^2 = b \cdot c - a' \cdot a'', \quad w_{\alpha} = \frac{1}{b+c} \sqrt{bc(a+b+c)(-a+b+c)} = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcs(s-a)};$$

$$w_{\beta}^2 = c \cdot a - b' \cdot b'', \quad w_{\beta} = \frac{1}{c+a} \sqrt{ca(a+b+c)(a-b+c)} = \frac{2}{c+a} \sqrt{cas(s-b)};$$

$$w_{\gamma}^2 = a \cdot b - c' \cdot c'', \quad w_{\gamma} = \frac{1}{a+b} \sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)} = \frac{2}{a+b} \sqrt{abs(s-c)};$$

Ferner:

$$a' \cdot b' \cdot c' = a'' \cdot b'' \cdot c'';$$

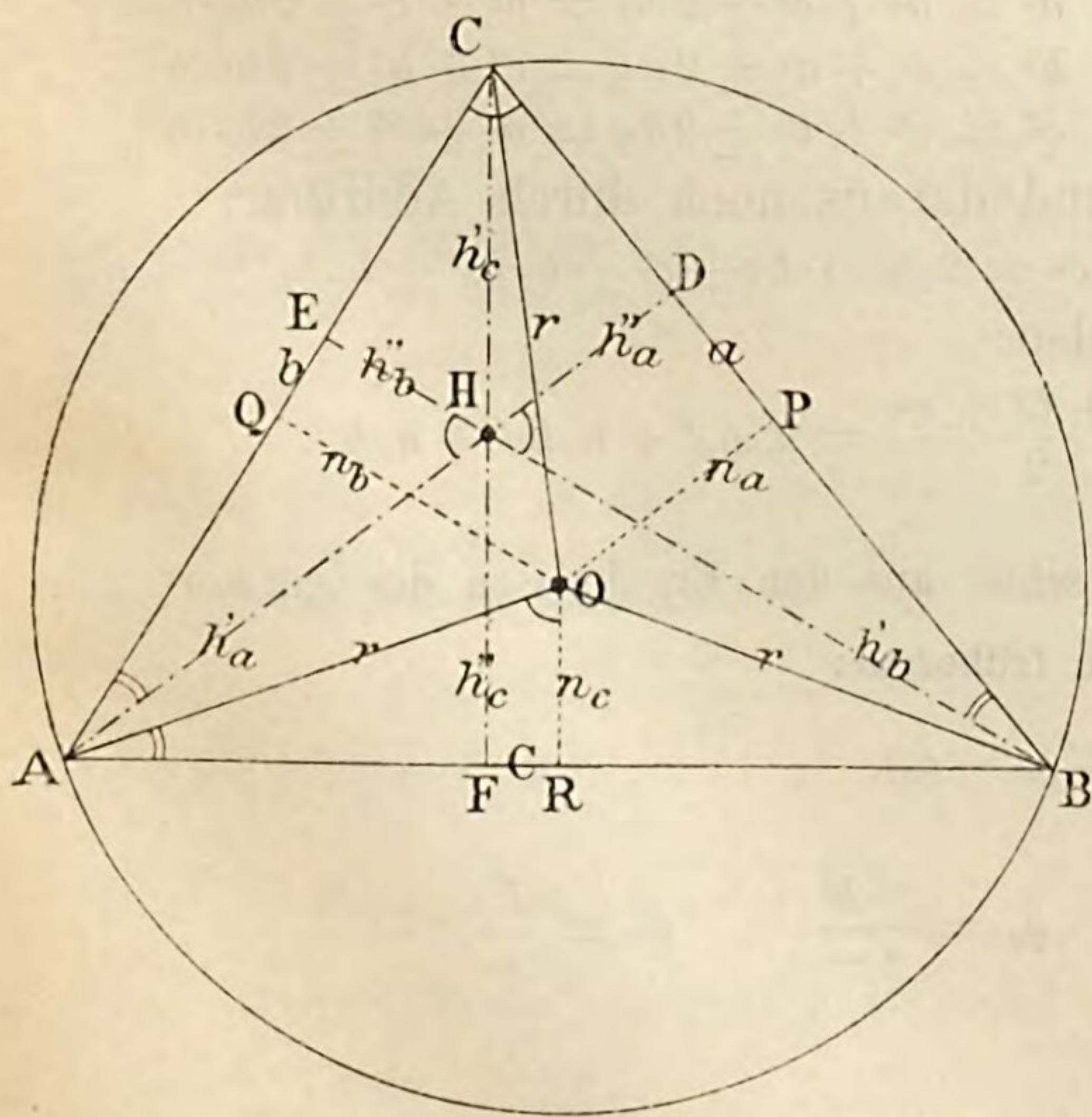
$$\frac{a'' \cdot b''}{a' \cdot b'} = \frac{c'}{c''} = \frac{a}{b}, \quad a = \sqrt{\frac{c'}{c''} (w_{\gamma}^2 + c' c'')} = \sqrt{\frac{b''}{b'} (w_{\beta}^2 + b' b'')};$$

$$\frac{b'' \cdot c''}{b' \cdot c'} = \frac{a'}{a''} = \frac{b}{c}, \quad b = \sqrt{\frac{a'}{a''} (w_{\alpha}^2 + a' a'')} = \sqrt{\frac{c''}{c'} (w_{\gamma}^2 + c' c'')};$$

$$\frac{c'' \cdot a''}{c' \cdot a'} = \frac{b'}{b''} = \frac{c}{a}, \quad c = \sqrt{\frac{b'}{b''} (w_{\beta}^2 + b' b'')} = \sqrt{\frac{a''}{a'} (w_{\alpha}^2 + a' a'')}.$$

Frage 57. Welche Folgerungen für den Radius des Umkreises und die Höhenabschnitte liefert Satz 19?

Figur 48.



Erkl. 136. Als Peripheriewinkel auf Bogen AB ist $\angle ACB = \gamma = \frac{1}{2} \angle AOB = \angle AOR$. Ferner $\angle CAD$ im Dreieck ACD gleich $90^\circ - \gamma = \angle OAR$ und deswegen weiter im

Antwort. Da nach den Erkl. 382 und 383 des IV. Teiles die in Figur 48 bezeichneten Winkel bei C, O, H gleich γ , sowie bei A und $B = 90^\circ - \gamma$ sind, so müssen in den Dreiecken ARO mit Seiten $r, \frac{c}{2}, n_c = \frac{1}{2} h'_c$, und ADC mit Seiten b und h_a und p_a , sowie AEH mit Seiten h'_a, p_b, h''_b , und anderseits BEC mit Seiten a, h_b, q_b und BDH mit h'_b, q_a, h''_a die Flächen sich verhalten wie die Quadrate entsprechender Seiten, und die Quotienten entsprechender Seiten gleich sein. Man kann daher ansetzen:

$$\frac{r}{\frac{c}{2}} = \frac{b}{h_a} = \frac{h'_a}{p_b} = \frac{a}{h_b} = \frac{h'_b}{q_a}$$

und

$$\frac{r}{n_c} = \frac{r}{\frac{h'_c}{2}} = \frac{b}{p_a} = \frac{h'_a}{h''_b} = \frac{a}{q_b} = \frac{h'_b}{h''_a}.$$

Hieraus ergibt sich eine ganze Reihe von Folgerungen, nämlich:

$$r = \frac{c \cdot b}{2 h_a} = \frac{c \cdot a}{2 \cdot p_b} = \frac{h'_c \cdot h'_a}{2 h''_b} = \frac{h'_c \cdot h'_b}{2 h''_a}$$

und als entsprechendes drittes:

$$r = \frac{a \cdot b}{2 \cdot h_c} = \frac{h'_a \cdot h'_b}{2 h''_c}.$$

Dreieck AHE der $\angle AHE = 90^\circ - EHA = 90^\circ - (90^\circ - \gamma) = \gamma$.

1) Nimmt man hiervon einzeln das erste:

$$r = \frac{a \cdot b}{2 \cdot h_c}$$

und ersetzt darin h_c nach Antwort der Frage 45 durch:

$$\frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2}{c} \cdot F,$$

so findet man:

$$r = \frac{a \cdot b}{2 \cdot \frac{2}{c} \cdot F} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4F} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}.$$

2) Ferner entsteht aus obiger Gruppe:

$$\frac{h_a'}{h_b''} = \frac{h_b'}{h_a''}, \text{ also } h_a' \cdot h_a'' = h_b' \cdot h_b'' = h_c' \cdot h_c'';$$

$$a \cdot q_a = h_b \cdot h_b', \quad b \cdot q_b = h_c \cdot h_c', \quad c \cdot q_c = h_a \cdot h_a';$$

$$a \cdot p_a = h_c \cdot h_c', \quad b \cdot p_b = h_a \cdot h_a', \quad c \cdot p_c = h_b \cdot h_b'.$$

3) Setzt man endlich noch die dritte Gruppe von Gleichheiten der Quotienten der Seiten obengenannter Dreiecke an, so wird:

$$\frac{c}{h_c'} = \frac{h_a}{p_a} = \frac{p_b}{h_b''} = \frac{h_b}{q_b} = \frac{q_a}{h_a''},$$

und daraus weiter:

$$p_a \cdot q_a = h_a \cdot h_a'', \quad p_b \cdot q_b = h_b \cdot h_b'', \quad p_c \cdot q_c = h_c \cdot h_c''.$$

4) Wird auch im erweiterten pythagoreischen Lehrsatz das Ergebnis 2 von oben eingesetzt, so entsteht:

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2cq = b^2 + c^2 \pm 2h_a \cdot h_a',$$

$$b^2 = c^2 + a^2 \pm 2aq = c^2 + a^2 \pm 2h_b \cdot h_b',$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2bq = a^2 + b^2 \pm 2h_c \cdot h_c',$$

und daraus noch durch Addition:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 \pm h_a h_a' \pm h_b h_b' \pm h_c h_c')$$

also:

$$\pm \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = h_a h_a' + h_b h_b' + h_c h_c'.$$

Erkl. 137. Das Ergebnis $r = \frac{abc}{4F}$ konnte schon aus den Ergebnissen der Antwort von Frage 46 abgeleitet werden. Dort fand sich nach früherem:

$$r = \frac{1}{4} (q_a + q_b + q_c - q_0).$$

Setzt man darin für:

$$q_a = \frac{F}{s-a}, \quad q_b = \frac{F}{s-b}, \quad q_c = \frac{F}{s-c}, \quad q_0 = \frac{F}{s}$$

ein, so entsteht:

$$\begin{aligned} r &= \frac{F}{4} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} - \frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{F}{4} \cdot \frac{s[(s-a)(s-b) + (s-b)(s-c) + (s-c)(s-a)] - (s-a)(s-b)(s-c)}{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \frac{F}{4F^2} [s(3s^2 - 2as - 2bs - 2cs + ab + bc + ca) - s(s^2 - as - bs - cs + ab + bc + ca) + abc] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4F} [s(2s^2 - as - bs - cs) + abc] = \frac{1}{4F} \{s[2s^2 - s \cdot (a + b + c)] + abc\}$$

$$= \frac{1}{4F} (2s^3 - 2s^3 + abc) = \frac{abc}{4F}.$$

Erkl. 138. Dasselbe Ergebnis für r entsteht aus $r = \frac{b \cdot c}{2h_a} = \frac{c \cdot a}{2h_b}$ ebenfalls, wenn darin h_a oder h_b durch $\frac{2}{a} \cdot F$ bzw. $\frac{2}{b} \cdot F$ ersetzt wird.

Erkl. 139. Als selbstverständliche Bestätigungen früherer Ergebnisse sind ferner in der obenstehenden Gruppe von Gleichheiten enthalten:

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c \quad (\text{Satz 5 und Antwort der Frage 16}),$$

$$a \cdot p_a = b \cdot q_b, \quad b \cdot p_b = c \cdot q_c, \quad c \cdot p_c = a \cdot q_a \quad (\text{Satz 11}).$$

Erkl. 140. Aus der Gleichung $h_a' \cdot h_a'' = h_b' \cdot h_b''$ erhält man:

$$\frac{h_a'}{h_b'} = \frac{h_b''}{h_a''}$$

und durch beiderseitige Addition von 1:

$$\frac{h_a'}{h_b'} + 1 = \frac{h_b''}{h_a''} + 1; \quad \frac{h_a' + h_b'}{h_b'} = \frac{h_b'' + h_a''}{h_a''} \quad \text{oder auch} \quad \frac{h_a' + h_b'}{h_a'' + h_b''} = \frac{h_b'}{h_a''}.$$

Nun ist:

$$r = \frac{h_c'}{2} \cdot \frac{h_b'}{h_a''}, \quad \text{also} \quad r = \frac{h_c'}{2} \cdot \frac{h_a' + h_b'}{h_a'' + h_b''},$$

und ebenso:

$$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_b' + h_c'}{h_b'' + h_c''} \cdot h_a', \quad \text{sowie} \quad r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_a' + h_c'}{h_a'' + h_c''} \cdot h_b'.$$

Auf dieselbe Weise entsteht auch:

$$\frac{h_a' - h_b'}{h_a'' - h_b''} = \frac{h_b'}{h_a''}, \quad \text{also} \quad r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_a' - h_b'}{h_a'' - h_b''} \cdot h_c'$$

und die beiden entsprechenden:

$$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_b' - h_c'}{h_b'' - h_c''} \cdot h_a' \quad \text{und} \quad r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_a' - h_c'}{h_a'' - h_c''} \cdot h_b'.$$

Frage 58. Welche Eigenschaften der besonderen Dreiecke ergeben sich aus der Anwendung der seitherigen Ergebnisse — zunächst für das rechtwinklige Dreieck?

Erkl. 141. Die in Erkl. 113 aufgestellten Beziehungen erleiden mehrfache Vereinfachung beim rechtwinkligen Dreieck. So wird:

$$q_a q_b - q_0 q_c = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = 0.$$

In der That entsteht:

$$q_a q_b = \frac{a^2 b^2}{(-a + b + c)(a - b + c)}$$

$$= \frac{a^2 b^2}{-a^2 - b^2 + c^2 + 2ab}$$

$$= \frac{a^2 b^2}{2ab} = \frac{ab}{2}$$

und

$$q_0 q_c = \frac{a^2 b^2}{(a + b + c)(a + b - c)}$$

$$= \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab} = \frac{a^2 b^2}{2ab} = \frac{ab}{2}.$$

Antwort. 1) Im rechtwinkligen Dreieck besteht zwischen den drei Seiten die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$, und dadurch wird im Ausdruck der Fläche:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

derselbe Wert erzeugt, als durch die unmittelbare Formel:

$$F = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Man hat also:

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot b^2$$

oder:

$$= \frac{1}{4} c^2 \cdot h^2,$$

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = 4a^2 b^2 = 4c^2 h^2.$$

Dadurch erhalten auch die Ausdrücke für q in Antwort der Frage 46 andere Gestalt, nämlich:

Denn jedesmal ist $a^2 + b^2 = c^2$, also:

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0, \quad -a^2 - b^2 + c^2 = 0.$$

Es bleibt also:

$$\varrho_a \varrho_b = \varrho_0 \varrho_c = \frac{ab}{2}.$$

Die entsprechenden Beziehungen ergeben auf Grund derselben Formel:

$$\begin{aligned} \varrho_b \varrho_c - \varrho_0 \varrho_a &= b^2, \quad \varrho_a \varrho_c - \varrho_0 \varrho_b = a^2, \\ \varrho_a \varrho_b + \varrho_b \varrho_c + \varrho_c \varrho_a - \varrho_0 \varrho_a - \varrho_0 \varrho_b - \varrho_0 \varrho_c &= c^2, \\ (\varrho_0 + \varrho_a)(\varrho_c - \varrho_b) &= a^2, \\ (\varrho_0 + \varrho_b)(\varrho_c - \varrho_a) &= b^2. \end{aligned}$$

Erkl. 142. Die Gleichung:

$$r = \frac{1}{4}(\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho_0)$$

wird fürs rechtwinklige Dreieck zu:

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} &= \frac{ab}{4} \left(\frac{1}{-a+b+c} + \frac{1}{a-b+c} + \frac{1}{a+b-c} - \frac{1}{a+b+c} \right) \\ &= \frac{ab}{8} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} - \frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{ab}{8} \cdot \frac{1}{F^2} \cdot abc \quad (\text{vgl. die Entwicklung in Erkl. 137}). \end{aligned}$$

Da also $F = \frac{ab}{2}$ ist, so wird:

$$r = \frac{a^2 b^2 c}{8} \cdot \frac{4}{a^2 b^2} = \frac{c}{2},$$

wie zuvor.

Erkl. 143. Berücksichtigt man die im ersten Teile nebenstehender Antwort enthaltenen Ausdrücke für $\varrho_0, \varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$, so erhält man:

$$\varrho_0 = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{a+b-c}{2}.$$

In der That erhält man aus dieser Gleichung:

$$\begin{aligned} 2ab &= (a+b+c)(a+b-c) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 + b^2) = 2ab. \end{aligned}$$

Ebenso wird:

$$\varrho_a = \frac{ab}{-a+b+c} = \frac{a-b+c}{2},$$

$$\varrho_b = \frac{ab}{a-b+c} = \frac{-a+b+c}{2},$$

$$\varrho_c = \frac{ab}{a+b-c} = \frac{a+b+c}{2},$$

denn:

$$\begin{aligned} 2ab &= (a-b+c)(-a+b+c) \\ &= (a^2 + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) \end{aligned}$$

für die beiden ersten, und ebenso für das dritte genau wie zuvor für ϱ_0 .

$$\begin{aligned} \varrho_0 &= \frac{ab}{a+b+c}, \quad \varrho_a = \frac{ab}{-a+b+c}, \\ \varrho_b &= \frac{ab}{a-b+c}, \quad \varrho_c = \frac{ab}{a+b-c}. \end{aligned}$$

Ferner (vergl. Erkl. 141):

$$\varrho_a \cdot \varrho_b = \varrho_0 \cdot \varrho_c = \frac{a \cdot b}{2} = F,$$

$$\varrho_a \varrho_b \varrho_c = \frac{ab}{4}(a+b+c),$$

$$\varrho_0 \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = \frac{1}{4} a^2 b^2 = F^2.$$

2) In den Ausdrücken der Antwort auf Frage 47 wird jeweils:

$$n_c = 0, \quad n_a = \frac{b}{2}, \quad n_b = \frac{a}{2},$$

also, wie schon längst bekannt:

$$r = \frac{c}{2}.$$

Von den Höhenabschnitten werden:

$$h_a = h_a' = b, \quad h_a'' = 0;$$

$$h_b = h_b' = a, \quad h_b'' = 0;$$

$$h_c = h_c'' = \frac{ab}{c}, \quad h_c' = 0.$$

$$r + \varrho_0 = n_a + n_b + n_c = \frac{b+a}{2},$$

$$r - \varrho_a = \frac{b-a}{2},$$

denn:

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} + \frac{ab}{a+b+c} &= \frac{ac + bc + c^2 + 2ab}{2(a+b+c)} \\ &= \frac{ac + bc + (a^2 + b^2) + (ab + ab)}{2(a+b+c)} \\ &= \frac{a(a+b+c) + b(a+b+c)}{2(a+b+c)} = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} - \frac{ab}{-a+b+c} &= \frac{-ac + bc + (a^2 + b^2) - (ab + ab)}{2(-a+b+c)} \\ &= \frac{-a(-a+b+c) + b(-a+b+c)}{2(-a+b+c)} \\ &= \frac{b-a}{2}. \end{aligned}$$

3) Hiezu kommen noch als Ergebnisse der Figur 63 und Antwort der Frage 71 des IV. Teiles die Werte für $\varrho_0, \varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ aus den Tangentenabschnitten:

$$\varrho_0 = t_3 = s - c = \frac{a+b-c}{2},$$

$$\varrho_a = t_3' = s - b = \frac{a-b+c}{2},$$

Erkl. 144. Setzt man:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

und darin:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

so wird:

$$\begin{aligned} m_a &= \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + c^2 + (c^2 - a^2)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + c^2 + b^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Darin nun wieder:

$$b^2 = c^2 - a^2,$$

gibt:

$$\begin{aligned} m_a &= \frac{1}{2} \sqrt{3c^2 - 3a^2 + c^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4c^2 - 3a^2} = \sqrt{c^2 - \frac{3}{4}a^2}. \end{aligned}$$

Und genau dieselbe Entwicklung findet statt für m_b . — Der Kreis im Satz in Erklärung 121 fällt mit dem Umkreis des rechtwinkligen Dreiecks zusammen, wenn:

$$S = c^2 = a^2 + b^2,$$

denn dann ist eben:

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2S - c^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 - c^2} = \frac{c}{2}.$$

Erkl. 145. Rechnet man:

$$\begin{aligned} w_a &= \frac{1}{b+c} \sqrt{bc(a+b+c)(-a+b+c)} \\ &= \frac{1}{b+c} \sqrt{bc(b^2 + 2bc + c^2 - a^2)}, \end{aligned}$$

so wird wegen $c^2 - a^2 = b^2$:

$$\begin{aligned} w_a &= \frac{1}{b+c} \sqrt{bc(2bc + 2b^2)} \\ &= \frac{1}{b+c} \sqrt{b^2 \cdot 2c(c+b)} \\ &= \frac{b}{b+c} \sqrt{2c(c+b)} = b \cdot \sqrt{\frac{2c}{b+c}}, \end{aligned}$$

und ebenso:

$$w_b = \frac{a}{a+c} \sqrt{2c(a+c)}.$$

Aber in w_c erscheint die

$$\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)},$$

welche nach Erkl. 143 gleich $\sqrt{2ab}$ ist, also:

$$w_c = \frac{1}{a+b} \sqrt{ab \cdot 2ab} = \frac{ab}{a+b} \sqrt{2}.$$

Erkl. 146. Für die Seitenabschnitte wird zusammengefasst:

$$\frac{u_c}{v_c} = \frac{a}{b}, \quad u_c \cdot v_c = ab - w_c^2 = ab - \frac{2a^2b^2}{(a+b)^2}.$$

Da nun $u^2 = u \cdot v \cdot \frac{u}{v}$ ist und $v^2 = u \cdot v \cdot \frac{v}{u}$, so entsteht hieraus:

$$q_b = t_3'' = s - a = \frac{-a + b + c}{2},$$

$$q_c = t_3''' = s = \frac{a + b + c}{2}.$$

Dieselben stimmen mit den obigen überein in Rücksicht des pythagoreischen Satzes.

4) Die Werte für die Mittellinien m_a und m_b bleiben ohne wesentliche Aenderung; dagegen muss $m_c = r = \frac{c}{2}$ werden, in Uebereinstimmung mit den Formeln:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 2 \left[m_c^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 \right] \\ &= c^2 = 2 \left[\left(\frac{c}{2} \right)^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 \right] = \frac{2 \cdot 2c^2}{4} = c^2 \end{aligned}$$

bezw.:

$$\begin{aligned} m_c &= \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 - c^2} = \frac{1}{2} \sqrt{c^2} = \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Darnach wird:

$$\begin{aligned} m_a &= \frac{1}{2} \sqrt{3b^2 + c^2} = \sqrt{c^2 - \frac{3}{4}a^2}, \\ m_b &= \frac{1}{2} \sqrt{3a^2 + c^2} = \sqrt{c^2 - \frac{3}{4}b^2}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen in Antwort der Frage 49 und Erkl. 122, 123 werden durch diese Werte zu Identitäten.

5) Die Ausdrücke für die Winkelhalbierenden der Winkel des rechtwinkligen Dreiecks in Antwort der Frage 56 erfahren ebenfalls einige Aenderungen; denn es wird:

$$\begin{aligned} w_b &= b \sqrt{\frac{2c}{b+c}}, \quad w_b = a \sqrt{\frac{2c}{a+c}}, \\ w_c &= \frac{ab}{a+b} \cdot \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dass dabei jede Winkelhalbierende nur in zwei Seiten ausgedrückt erscheint, ist wegen des pythagoreischen Satzes erklärlich, da ja durch zwei Seiten die dritte bestimmt ist. Aus diesen Werten für die Winkelhalbierenden lassen sich auch für die Abschnitte u und v der Winkelhalbierenden dieselben Ausdrücke in den drei Seiten aufstellen, wie in Antwort der Frage 56:

$$u_c^2 = \frac{a}{b} \left[ab - \frac{2a^2b^2}{(a+b)^2} \right] = \frac{a}{b} \cdot \frac{ab(a^2+b^2)}{(a+b)^2}$$

$$= \left(\frac{a}{a+b} \right)^2 \cdot (a^2+b^2) = \left(\frac{ac}{a+b} \right)^2$$

und

$$v_c^2 = \frac{b}{a} \left[ab - \frac{2a^2b^2}{(a+b)^2} \right]$$

$$= \left(\frac{b}{a+b} \right)^2 \cdot (a^2+b^2) = \left(\frac{bc}{a+b} \right)^2.$$

Ebenso wird:

$$\frac{u_a}{v_a} = \frac{b}{c}, \quad u_a \cdot v_a = bc - w_a^2 = bc - \frac{2b^2c}{b+c},$$

also:

$$u_a^2 = \frac{b}{c} \cdot \frac{bc(c-b)}{b+c} = b^2 \cdot \frac{c-b}{c+b}.$$

Dass $\sqrt{\frac{c-b}{c+b}} = \frac{a}{b+c}$ ist, folgt unmittelbar aus der Erweiterung der Wurzel mit $c+b$:

$$\sqrt{\frac{(c-b)(c+b)}{(c+b)(c+b)}} = \frac{1}{c+b} \cdot \sqrt{c^2-b^2} = \frac{a}{c+b}.$$

Diese Werte bestätigen also die Ergebnisse der Antwort von Frage 56.

$$u_a = b \sqrt{\frac{c-b}{c+b}} = \frac{ba}{b+c},$$

$$v_a = c \sqrt{\frac{c-b}{c+b}} = \frac{ca}{b+c};$$

$$u_b = c \sqrt{\frac{c-a}{c+a}} = \frac{bc}{a+c},$$

$$v_b = a \sqrt{\frac{c-a}{c+a}} = \frac{ab}{c+a};$$

$$u_c = \frac{a}{a+b} \sqrt{a^2+b^2} = \frac{ac}{a+b},$$

$$v_c = \frac{b}{a+b} \sqrt{a^2+b^2} = \frac{bc}{a+b}.$$

6) Die Formeln in Antwort der Frage 57 ergeben sämtlich nur Bekanntes, wenn darin für die h, h', h'' die obigen Werte eingesetzt werden:

$$a^2 = c \cdot p, \quad b^2 = c \cdot q, \quad h^2 = p \cdot q, \quad r = \frac{c}{2}$$

u. a. m.

Frage 59. Welche Werte haben die bisher besprochenen Stücke beim gleichschenkligen und beim gleichseitigen Dreieck?

Erkl. 147. Dass im gleichschenkligen Dreieck $\varrho_a = \varrho_b = h_c$ ist, folgte schon in Antwort der Frage 69 und Figur 61 des IV. Teiles, weil jeder dieser Radien mit h als Gegenseite ein Rechteck bildet. Ausser diesen beiden wird:

$$\varrho_0 = \frac{F}{s} = \frac{c \sqrt{4a^2 - c^2}}{2(a+b+c)} = \frac{c \sqrt{4a^2 - c^2}}{2(2a+c)}$$

$$= \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\frac{2a-c}{2a+c}};$$

$$\varrho_c = \frac{F}{s-c} = \frac{c \sqrt{4a^2 - c^2}}{2(a+b-c)} = \frac{c \sqrt{4a^2 - c^2}}{2(2a-c)}$$

$$= \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\frac{2a+c}{2a-c}}.$$

Also:

$$\varrho_0 \cdot \varrho_c = \frac{c^2}{4}; \quad \varrho_0 \varrho_c + \varrho_a \varrho_b = a^2,$$

denn:

$$\varrho_a = h, \quad \varrho_a \varrho_b = h^2, \quad h^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 = a^2.$$

$$\varrho_b \varrho_c - \varrho_0 \varrho_a = \varrho_a (\varrho_c - \varrho_0)$$

$$= h \cdot \frac{c}{2} \left(\sqrt{\frac{2a+c}{2a-c}} - \sqrt{\frac{2a-c}{2a+c}} \right)$$

Antwort. Im gleichschenkligen Dreieck ist:

$$h_c = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - c^2}.$$

Dadurch wird die Fläche:

$$\frac{c h_c}{2} = \frac{c}{4} \sqrt{4a^2 - c^2}.$$

In denselben Wert geht aber auch der Ausdruck:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

über, wenn darin $a=b$ gesetzt wird.

Ferner werden die zu den Seiten a und b gehörigen Stücke je einander gleich, weil $a=b$, also:

$$h_c = \frac{2}{c} \cdot \varrho_b (s-a) = \frac{-a+b+c}{c} \cdot \varrho_a$$

$$= \frac{c}{c} \cdot \varrho_a = \varrho_a = \varrho_b.$$

Für r erhält man noch (vgl. Erkl. 147):

$$\frac{1}{4} (\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho_0) = \frac{1}{4} \left(2h + \frac{c^2}{2h} \right)$$

$$= \frac{1}{8h} \cdot (4h^2 + c^2) = \frac{1}{2h} \left[h^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 \right] = \frac{a^2}{2h}.$$

$$= \frac{h \cdot c}{2 \sqrt{4a^2 - c^2}} [(2a + c) - (2a - c)]$$

$$= \frac{h \cdot c}{4 \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}} \cdot 2c = \frac{2hc^2}{4h} = \frac{c^2}{2},$$

wie in Erkl. 113 $= \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} = \frac{c^2}{2}$, weil $a = b$.

Also ist einzeln $\varrho_c - \varrho_0 = \frac{c^2}{2h_c}$. Auch:

$$h_{a'} = \frac{c^2}{2h_a}, h_{c''} = \frac{c^2}{4h_c} = \frac{1}{2} (\varrho_c - \varrho_0).$$

Erkl. 148. Da $a = b$, so entsteht aus den Gleichungen in Erkl. 119:

$$m_a = m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + a^2}, m_c = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - c^2},$$

und durch diese Werte werden auch die Formeln in Erkl. 122 und 123 identisch erfüllt. Aus Erkl. 135 wird:

$$w_a = \frac{c}{a + c} \sqrt{a(2a + c)} = w_b.$$

Erkl. 149. Von den nebenstehenden Ergebnissen für gleichseitige Dreiecke wurde schon früher, nach Antwort der Frage 70 im IV. Teile, wiederholt Gebrauch gemacht.

Ist ein Dreieck gleichzeitig gleichschenkelig und rechtwinklig, so vereinigt es auf sich die Gültigkeit der Formeln in dieser und der vorigen Antwort:

$$h = \frac{a^2}{c}, s(s - a)(s - b)(s - c) = \frac{a^4}{4} = \frac{c^2 h^2}{4}.$$

$$\varrho_0 = \frac{a^2}{2a + c}, \varrho_a = \varrho_b = \frac{a^2}{c} = h,$$

$$\varrho_c = \frac{a^2}{2a - c}, \varrho_a^2 = \varrho_0 \cdot \varrho_c = \frac{a^2}{2}.$$

Nach dem pythagoreischen Satze ist nämlich $a^2 + a^2 = c^2$, $c^2 = 2a^2$, $c = a\sqrt{2}$, also $\frac{a^4}{c^2} = \frac{a^4}{2a^2} = \frac{a^2}{2}$; und ferner:

$$h = \frac{a^2}{a\sqrt{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{2},$$

$$\varrho_0 = \frac{a}{2 + \sqrt{2}} = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2}),$$

$$\varrho_c = \frac{a}{2}(2 + \sqrt{2}), \varrho_a = \varrho_b = h = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Weiter ist:

$$r = \frac{c}{2} = m_c = w_c; m_b = \frac{a}{2}\sqrt{5},$$

$$w_a = a \sqrt{\frac{2c}{a + c}} = a \sqrt{\frac{2a\sqrt{2}}{a + a\sqrt{2}}}$$

$$= a \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}} = a \sqrt{2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)},$$

$$= a \sqrt{2(2 - \sqrt{2})} \text{ u. s. w.}$$

Für die Mittellinie m_c entsteht ebenfalls:

$$\sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = h_c.$$

Für die Winkelhalbierende w_c wird:

$$u = v = \frac{c}{2},$$

also:

$$w_c^2 = a \cdot a - \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} = a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = h_c^2$$

oder:

$$w_c = \frac{1}{2a} \sqrt{a^2(2a + c)(2a - c)}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - c^2} = h_c.$$

Endlich wird:

$$r = \frac{a^2 c}{4F} = \frac{a^2}{2h_c},$$

und weil:

$$p_c = q_c = \frac{c}{2}, \frac{c^2}{2} = h_a \cdot h_{a'}, \frac{c^2}{4} = h_c \cdot h_{c''},$$

auch:

$$h_{c''} = \frac{c^2}{4h_c} = \frac{c^2}{2\sqrt{4a^2 - c^2}}.$$

2) Beim gleichseitigen Dreieck, wo $a = b = c$, fallen auch noch die Unterschiede des gleichschenkligen Dreiecks fort, und es bleibt:

$$h_a = h_b = h_c = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3};$$

die Fläche:

$$F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}; h = \varrho_a = \varrho_b = \varrho_c = \frac{a}{2}\sqrt{3},$$

(vergl. Figur 92 im IV. Teile),

$$\varrho_0 = \frac{2F}{3a} = \frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{h}{3}.$$

$$r = \frac{a^2}{2h} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{3} \cdot h;$$

$$\frac{a^2}{2} = h \cdot h', \frac{a^2}{4} = h \cdot h'', \text{ also } h' = 2h'' = \frac{1}{3} \cdot h.$$

Im gleichseitigen Dreieck ist also der Radius des Umkreises gleich zwei Drittteilen, der Radius des Inkreises gleich einem Drittel, der Radius jedes Ankreises gleich der ganzen Höhe des Dreiecks.

3) Im gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck ist die Grundseite:

$$c = a \cdot \sqrt{2},$$

Drückt man diese Stücke in c , statt in a aus, der Schenkel:
so wird:

$$h = \frac{c}{2}, \quad e_0 = \frac{c}{4} \sqrt{2} (2 - \sqrt{2}) = \frac{c}{2} (\sqrt{2} - 1),$$

$$e_c = \frac{c}{2} \sqrt{2} (2 + \sqrt{2}) = \frac{c}{2} (\sqrt{2} + 1),$$

$$e_a = e_b = h = \frac{c}{2}, \quad m_a = \frac{c}{3} \sqrt{10},$$

$$w_a = \frac{c}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} (2 - \sqrt{2}) = c \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

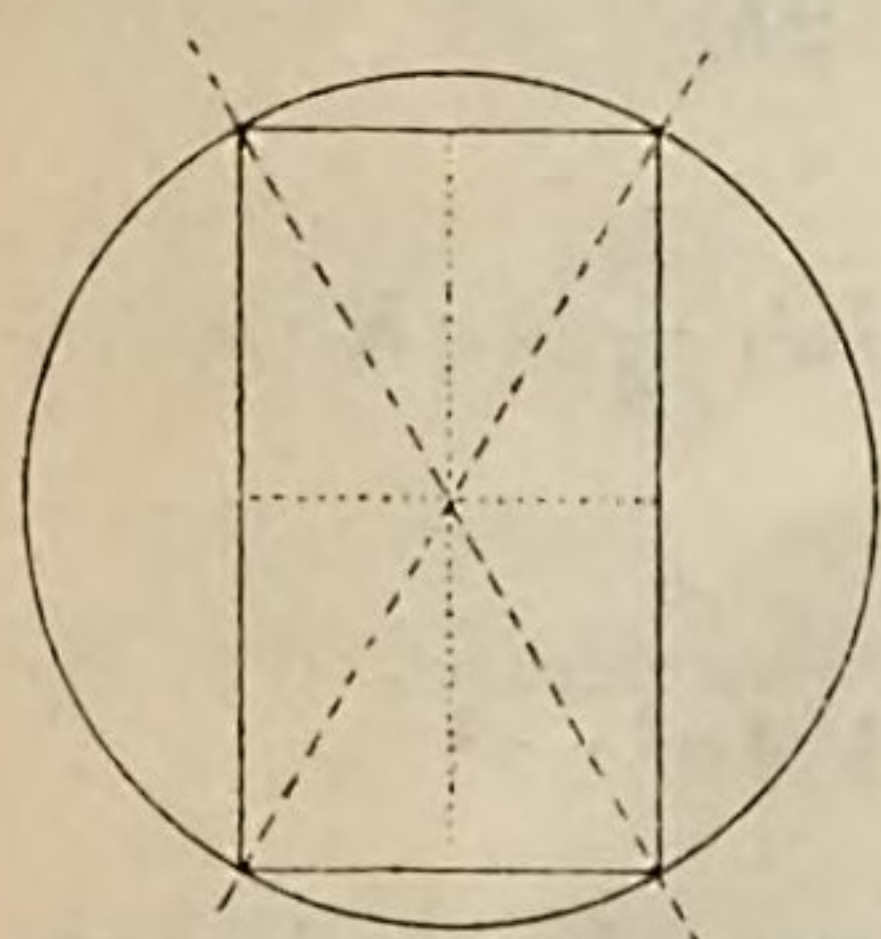
$$a = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c}{2} \sqrt{2},$$

die Höhe:

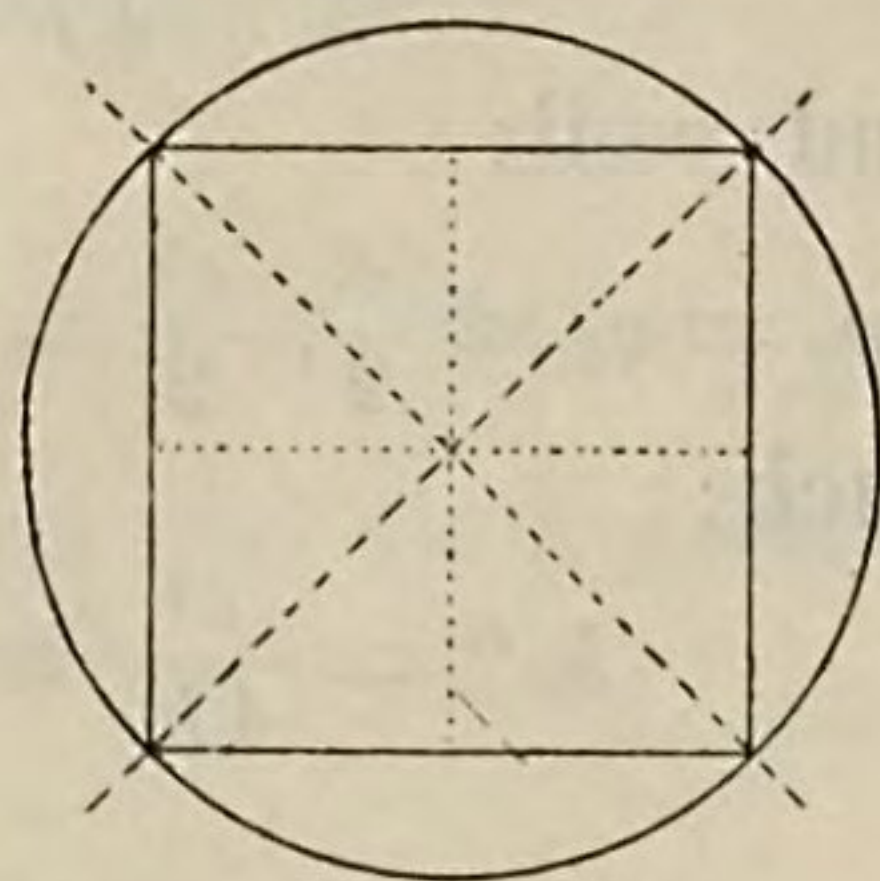
$$= \frac{c}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{2} \text{ (vgl. Erkl. 149).}$$

Frage 60. Welche Anwendungen gestattet der pythagoreische Lehrsatz auf die Vierecke, und zwar zunächst auf Quadrat, Rechteck, Rhombus?

Figur 49.



Figur 50.



Erkl. 150. Beim Quadrat und Rechteck bildet jede Diagonale als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck mit zwei Seiten als Katheten, beim Quadrat und Rhombus ebenso jede Seite als Hypotenuse mit zwei Diagonalenhälften. Beim Rhombus ist daher:

$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = \frac{e^2 + f^2}{4},$$

also:

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{e^2 + f^2}.$$

Ferner ist der Inhalt des Rhombus nach Antwort der Frage 19 $= \frac{e \cdot f}{2}$ und nach Satz 3 $= a \cdot h$,

folglich $e \cdot f = 2 \cdot a \cdot h$, $h = \frac{e \cdot f}{2a}$. Nun ist aber

der Radius des Inkreises im Rhombus $\frac{h}{2} = \frac{e \cdot f}{4a}$,

oder wenn darin für e der Wert $\sqrt{4a^2 - f^2}$ eingesetzt wird:

$$e = \frac{f}{4a} \sqrt{4a^2 - f^2} = \frac{f}{4a} \sqrt{(2a + f)(2a - f)}:$$

also zwei Bestimmungsstücke.

Antwort. 1) Beim Quadrat erkennt man mittelbar, dass die Diagonale $e = a \cdot \sqrt{2}$ ist, die Seite:

$$a = \frac{e}{\sqrt{2}} = \frac{e}{2} \sqrt{2},$$

der Radius des Umkreises:

$$r = \frac{e}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{2},$$

die Seite:

$$a = r \sqrt{2}.$$

2) Beim Rechteck ist jede Diagonale:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2},$$

der Radius des Umkreises:

$$r = \frac{e}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2},$$

umgekehrt Seite:

$$a = \sqrt{e^2 - b^2} = \sqrt{4r^2 - b^2}.$$

3) Beim Rhombus ist die Seite:

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{e^2 + f^2},$$

Diagonale:

$$e = \sqrt{4a^2 - f^2},$$

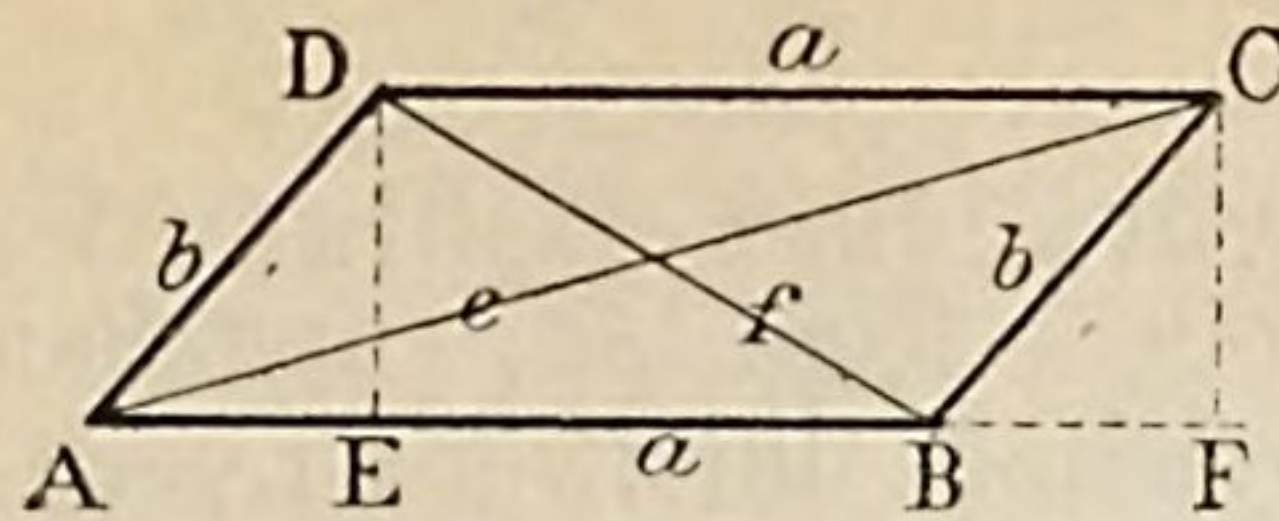
der Radius des Inkreises:

$$e = \frac{h}{2} = \frac{e \cdot f}{4a} = \frac{f}{4a} \sqrt{4a^2 - f^2}.$$

Frage 61. Wie beschränken sich die vorigen Angaben für Parallelogramm, Deltoid, Antiparallelogramm?

Antwort. 1) Beim Parallelogramm entstehen durch die Höhe von

Figur 51.



Erkl. 151. Das Parallelogramm (und ebenso das Deltoid und Antiparallelogramm) ist durch drei Bestimmungsstücke bestimmt, also dürfen in einer Gleichung je vier Grössen auftreten, von denen drei bekannt, die vierte unbekannt ist. Für die zweite Höhe des Parallelogramms wird die Projektion von a auf b eben:

$$q = \frac{a^2 + b^2 - f^2}{2b} = \frac{e^2 - a^2 - b^2}{2b}, \quad h_b = \sqrt{b^2 - q^2}.$$

Weil also $ah_a = b \cdot h_b$, so wird:

$$a \sqrt{a^2 - p^2} = b \sqrt{b^2 - q^2},$$

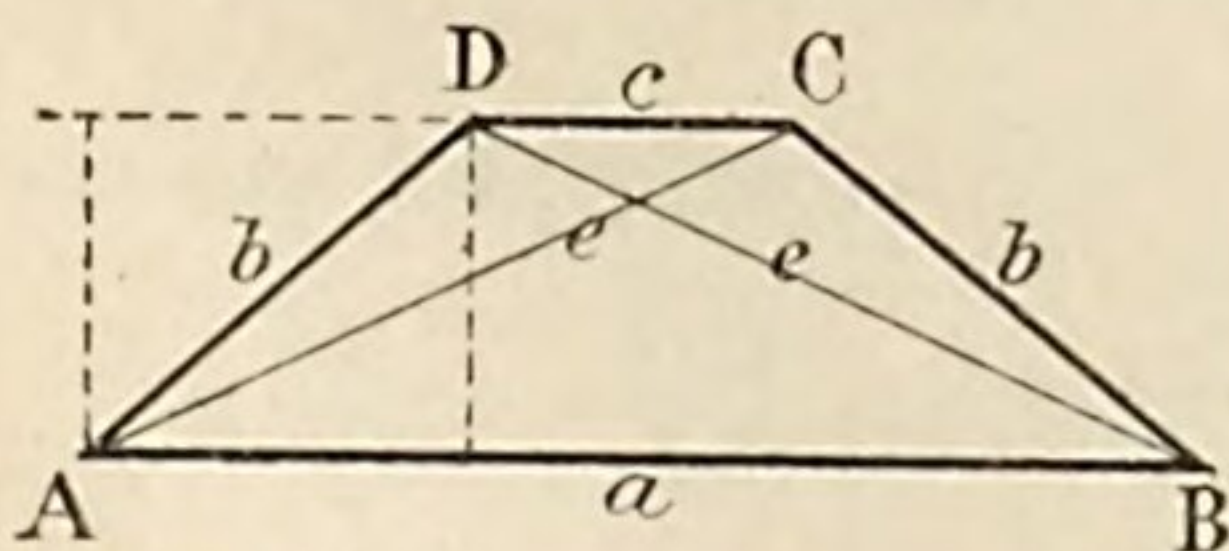
oder $a^4 - b^4 = a^2 p^2 - b^2 q^2$: als Gleichung zwischen a, b, p, q .

Erkl. 152. Das Ergebnis $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$

oder $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(e^2 + f^2)$ lässt sich in dem Satze aussprechen: Im Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der beiden Seitenstrecken gleich der halben Summe der Quadrate der beiden Diagonalen, oder die Summe der Quadrate aller vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen.

Dies stimmt überein mit den Ergebnissen der vorigen Antwort der Frage 60, indem beim Rhombus $a = b$, also $e^2 + f^2 = 4a^2$, beim Rechteck $e = f$, also $a^2 + b^2 = e^2 = f^2$, beim Quadrat $a = b$ und $e = f$, $2a^2 = e^2$, $e = a\sqrt{2}$.

Figur 52.



Erkl. 153. Die Operationen, welche mit den nebenstehenden Gleichungen vorgenommen wurden sind folgende: Ist

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ap \quad \text{und}$$

$$e^2 = b^2 + c^2 - 2cp,$$

so entsteht durch Erweiterung:

$$c \cdot e^2 = c(a^2 + b^2) - 2a \cdot c \cdot p \quad \text{und}$$

$$a \cdot e^2 = a(b^2 + c^2) + 2a \cdot c \cdot p,$$

also durch Addition:

$$e^2(a + c) = c(a^2 + b^2) + a(b^2 + c^2);$$

und durch Division mit dem beiderseits gemeinsamen Faktor $a + c$ entsteht $e^2 = b^2 + ac$, woraus einzeln:

$$a = \sqrt{\frac{e^2 - b^2}{c}}, \quad c = \sqrt{\frac{e^2 - b^2}{a}},$$

$$b = \sqrt{e^2 - ac}, \quad e = \sqrt{b^2 + ac}.$$

den Eckpunkten C und D auf a die kongruenten Dreiecke AED und BFC . Bezeichnet man nun darin die gleichen Stücke $AE = BF$ mit p als Projektion der Seite $b = d$ auf a , so wird nach dem erweiterten pythagoreischen Lehrsatz in den Dreiecken ABD für e bzw. ABC für f :

$$e^2 = a^2 + b^2 + 2ap, \quad f^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot p,$$

$$e^2 + f^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2),$$

$$p = \frac{a^2 + b^2 - f^2}{2a} = \frac{e^2 - a^2 - b^2}{2a},$$

$$h_a = \sqrt{a^2 - p^2}.$$

Dadurch sind Gleichungen gewonnen zwischen je vierten der Stücke a, b, e, f, p, h : man kann also immer eines dieser vier Stücke berechnen, wenn die drei andern gegeben sind.

2) Bezeichnet man beim Deltoid die Abschnitte der Diagonale f mit x und y , so erhält man:

$$x^2 = a^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2, \quad y^2 = b^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2,$$

also:

$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2 = (x + y)(x - y) = f(x - y),$$

so dass durch Division einzeln:

$$x + y = f, \quad x - y = \frac{a^2 - b^2}{f},$$

und hieraus durch Addition:

$$x = \frac{1}{2f}(f^2 + a^2 - b^2), \quad y = \frac{1}{2f}(f^2 - a^2 + b^2),$$

also wieder die Beziehungen zwischen a, b, e, f durch Gleichungen festgelegt.

3) Beim Antiparallelogramm erhält man ähnlich wie beim Parallelogramm zwei gleichgrosse Projektionen p der gleichen Seiten $b = d$ auf die parallelen Seiten $a \parallel c$. Dadurch wird in den Dreiecken ABC bzw. ACD :

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot p = b^2 + c^2 + 2cp,$$

also durch Erweiterung der ersten Gleichung mit c , der zweiten mit a :

$$e^2(a + c) = ab^2 + ac^2 + ca^2 + cb^2$$

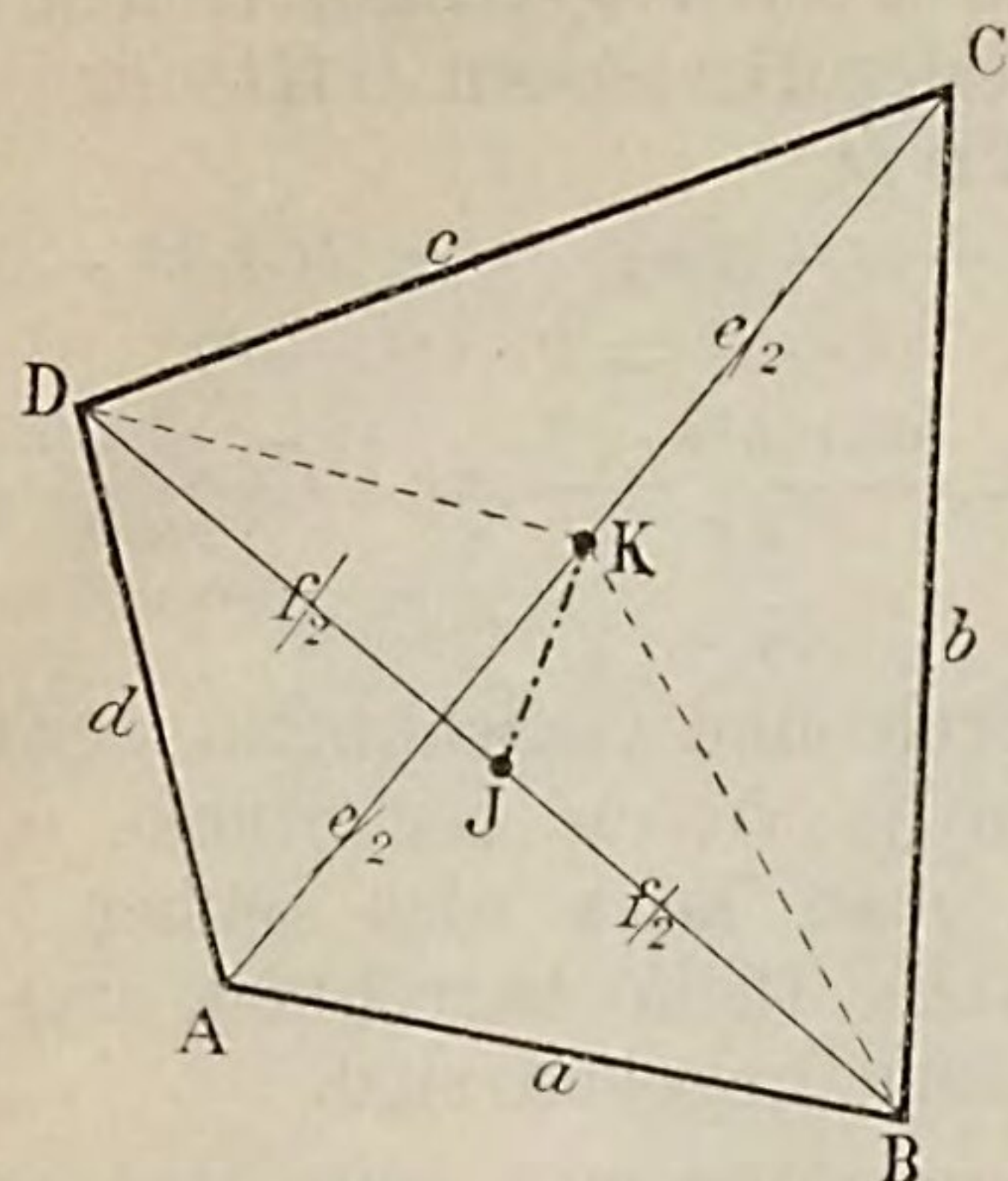
$$= b^2(a + c) + ac(a + c),$$

$$e^2 = b^2 + ac, \quad p = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2a} = \frac{e^2 - b^2 - c^2}{2c},$$

$$h = \sqrt{b^2 - p^2}.$$

Frage 62. Welche Beziehung zwischen Diagonalen und Seiten lässt sich beim beliebigen Viereck nachweisen?

Figur 53.



Erkl. 154. Fasst man das nebenstehende Ergebnis in Worte, so entsteht der

Satz. Die Summe der Quadrate der vier Seiten eines beliebigen Vierecks ist gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen vermehrt um das vierfache Quadrat der Verbindungsstrecke der beiden Diagonalenmittelpunkte.

In diesem Satze sind die vorhergehenden Eigenschaften der Parallelogramme enthalten, denn bei allen Parallelogrammen schneiden die Diagonalen einander im Mittelpunkte, also wird die Verbindungsstrecke $v = 0$, und es bleibt:

$$\text{oder: } a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = e^2 + f^2$$

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(e^2 + f^2).$$

Für das Deltoid wird:

$$2(a^2 + b^2) - (e^2 + f^2) = 4v^2,$$

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - (e^2 + f^2)};$$

für das Antiparallelogramm wird $v = \frac{a - c}{2}$,

wie sich aus der Differenz der Mittelparallelen je zweier Dreiecke mit Grundseiten a und c ergibt. In der That wird dann:

$$a^2 + 2b^2 + c^2 = 2e^2 + 4\left(\frac{a - c}{2}\right)^2,$$

$$a^2 + c^2 + 2b^2 = 2e^2 + a^2 + c^2 - 2ac; e^2 = b^2 + ac.$$

Antwort. Im beliebigen Viereck $ABCD$ (siehe Figur 53) entstehen durch die Diagonale e die zwei Dreiecke ABC und ADC . Verbindet man hierin die Diagonalenmitte K mit B und D , so sind KB und KD Mittellinien der Dreiecke ABC und ADC ; daher wird nach Satz 17:

$$a^2 + b^2 = 2\left[\left(\frac{e}{2}\right)^2 + BK^2\right]$$

und

$$c^2 + d^2 = 2\left[\left(\frac{e}{2}\right)^2 + DK^2\right],$$

also:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + 2 \cdot (BK^2 + DK^2).$$

Betrachtet man nun wieder BK und DK als Seiten des Dreiecks BDK , so ist f die dritte Seite und JK die zugehörige Mittellinie, oder nach demselben Satze 17:

$$BK^2 + DK^2 = 2\left[\left(\frac{f}{2}\right)^2 + JK^2\right].$$

Bezeichnet man also die Strecke JK etwa mit dem Buchstaben v , so wird:

$$2(BK^2 + DK^2) = 4\left[\frac{f^2}{4} + v^2\right] = f^2 + 4v^2,$$

also:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4v^2.$$

7) Ueber die Verwandlung der Figuren.

Frage 63. Was versteht man unter Verwandlung der Figuren?

Antwort. Unter Verwandlung der Figuren versteht man die Auf-

Erkl. 155. Wenn man sagt, ein Viereck werde in ein Dreieck verwandelt oder ein Rechteck in ein Quadrat u. s. w., so wird also dabei nicht eigentlich das Viereck selbst oder das Rechteck selbst verwandelt, sondern nur diejenige Flächengrösse, oder derjenige Flächeninhalt, welcher erst durch die Seiten des Vierecks oder des Rechtecks begrenzt war, nunmehr durch die Seiten einer andern Figur umgrenzt.

suchung einer neuen Figur von vorgeschriebener Gestalt, welche denselben Flächeninhalt hat, wie eine gegebene Figur. Dabei wird also dieselbe Flächengrösse, welche erst in Gestalt einer ersten Figur dargestellt war, in irgend einer andern Gestalt nochmals dargestellt.

Frage 64. Wie wird bei der Verwandlung von Flächen verfahren?

Erkl. 156. Da der Flächeninhalt einer Figur eine Grösse von der zweiten Dimension ist, so kann dieselbe nur als Produkt zweier Strecken erscheinen. Diese können sein: Grundseite, Höhe, Diagonale u. s. w. Bleiben beide Faktoren für die neue Figur gleichgross, so bleibt auch der Inhalt gleichgross; wird der eine Faktor verkleinert, so muss der andere entsprechend vergrössert werden u. s. w.

Antwort. Bei der Flächenverwandlung wird so verfahren, dass für die ganze gegebene Figur oder für einzelne Teile derselben auf Grund der bekannten Sätze über deren Inhalt solche Figurenteile von veränderter Gestalt eingesetzt werden, für welche das den Flächeninhalt darstellende Produkt denselben Wert erhält, wie zuvor.

Frage 65. Wie verwandelt man ein Rechteck in ein anderes Rechteck, dessen eine Seite die Hälfte, das Doppelte, das n -fache der vorigen Seite ist?

Erkl. 157. Die Zahl n kann dabei jeden beliebigen Wert über oder unter 1 erhalten: wird etwa die eine Seite $\frac{3}{4}$ der vorigen ersten, so muss die andere $\frac{4}{3}$ der vorigen zweiten werden. Denn man hat für $n = \frac{3}{4}$:

$$\frac{3}{4} a \cdot \frac{4}{3} b = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 3} \cdot ab = ab.$$

Antwort. Da der Inhalt eines Rechtecks nach Satz 1 das Produkt der zwei Seiten ist, so muss, wenn die eine Seite halb so gross, doppelt so gross, n mal so gross (oder so klein) wird, dafür die andere Seite doppelt so gross, halb so gross, n mal so klein (oder so gross) werden. Dann wird das Produkt wieder dasselbe, denn:

$$a \cdot b = \frac{a}{2} \cdot 2b = 2a \cdot \frac{b}{2} = na \cdot \frac{b}{n} = \frac{a}{n} \cdot nb.$$

Frage 66. Wie kann auf Grund der vorigen Antwort ein Rechteck in ein anderes Rechteck von gegebener Seite verwandelt werden?

Erkl. 158. Die erste Ausführungsart der nebenstehenden Antwort deckt sich unmittelbar mit der vorigen Antwort, dass $n \cdot a \frac{b}{n} = ab$. Die zweite Ausführung lässt sich folgendermassen rechnerisch darstellen: Sind die Seiten des gegebenen Rechtecks a und b , jene des gesuchten aber a' und b' , so muss $a \cdot b = a' \cdot b'$ sein; da nun a' gegeben ist, so findet man sofort $b = \frac{a \cdot b}{a'}$.

Antwort. 1) Man suche durch Messung der einen Seite des gegebenen Rechtecks, sowie der gegebenen neuen Seite zu ermitteln, das wievielfache von ersterer die letztere ausmacht, multipliziere die andere Seite des vorhandenen Rechtecks mit dem reciproken Werte dieses Faktors und nehme dieses Produkt als zweite Seite des neuen Rechtecks.

2) Oder man bilde die Masszahl der gegebenen Rechtecksfläche, dividiere

Erkl. 159. Wenn a und a' inkommensurabel sind, so wird die erste Auflösung und ebenso aber auch die zweite, nur annäherungsweise möglich. Für diesen Fall ist überhaupt eine solche Ausführung dieser Aufgabe vorzuziehen, welche nicht auf Rechnung, sondern auf Konstruktion beruht, und wie sie später in diesem Abschnitte sich vorfindet (siehe Frage 73).

dieselbe durch die Masszahl der gegebenen Seitenlänge und nehme diesen Quotienten als zweite Seite des neuen Rechtecks.

Frage 67. Wie verwandelt man ein Parallelogramm in ein Rechteck?

Antwort. Nach Satz 2 geschieht dies durch Zeichnung der parallelen Höhen des Parallelogramms in zwei Endpunkten derselben Seite.

Frage 68. Wie verwandelt man ein Parallelogramm in ein anderes Parallelogramm

a) mit gegebener Seite (oder Höhe) und Beibehaltung der Winkel,

b) mit einer gegebenen Seite und Beibehaltung der andern Seite (oder Höhe),

c) mit gegebenem Winkel und Beibehaltung einer Seite (oder Höhe)?

Erkl. 160. Dass die Frage 68 a sowohl für Seiten als Höhen wörtlich gleich bleibt, geht hervor aus der Antwort der Frage 53 und Figur 45, aber auch schon aus der Antwort der Frage 145 und Figur 116 im III. Teile. Denn wenn die senkrechte Höhe verdoppelt, allgemein ver- n -facht wird, so wird der Inhalt ver- n -facht und dasselbe gilt, nach Antwort der Frage 53, wenn eine Seite ver- n -facht wird. Aus Antwort der Frage 145 im III. Teil geht aber unmittelbar hervor, dass die Seite sich ver- n -fachen muss, wenn die Höhe ver- n -facht wird, sowie umgekehrt.

Erkl. 161. Man erkennt aus Figur 4, dass die Aufgabe b) jeweils scheinbar zwei Lösungen erhält, z. B. $ABCD$ und ABC_4D_4 in Figur 4, weil der mit der gegebenen Strecke als Radius um A beschriebene Kreis die Gegenseite in zwei Punkten schneidet. Dass diese beiden Lösungen aber doch kongruent sind, und zwar ungleichwändig kongruent, geht daraus hervor, dass alle vier Seiten und Winkel beidemal gleich gross ausfallen nur in umgekehrter Umlaufsfolge. — Ist die gegebene Seite aber kürzer, als die zur Grundseite gehörige Höhe, so ist die Auflösung unmöglich.

Antwort. a) Die Beantwortung der ersten Frage fällt genau zusammen mit jener der Fragen 65 und 66. Man multipliziere die zweite Höhe (oder Seite) mit dem reciproken Werte des Faktors, durch den die neue Seite (oder Höhe) aus der entsprechenden vorherigen entsteht — oder man dividiere die Flächengrösse durch die gegebene Höhe oder Seite, um die zweite Seite oder Höhe zu erhalten.

b) Die Beantwortung der beiden andern Fragen stützt sich auf Satz 4 und Figur 4, wonach die Ecken C oder D beliebig auf der Linie CD verschoben werden können. Um also Frage b) zu beantworten, suche man einen Punkt D auf der Linie CD , der von A die gegebene Entfernung hat, und vervollständige das Parallelogramm: entweder durch die Parallele $BC \parallel AD$, oder indem man auch Punkt C so bestimmt, dass er von B die gegebene Entfernung als gleiche und parallele Gegenseite erhält.

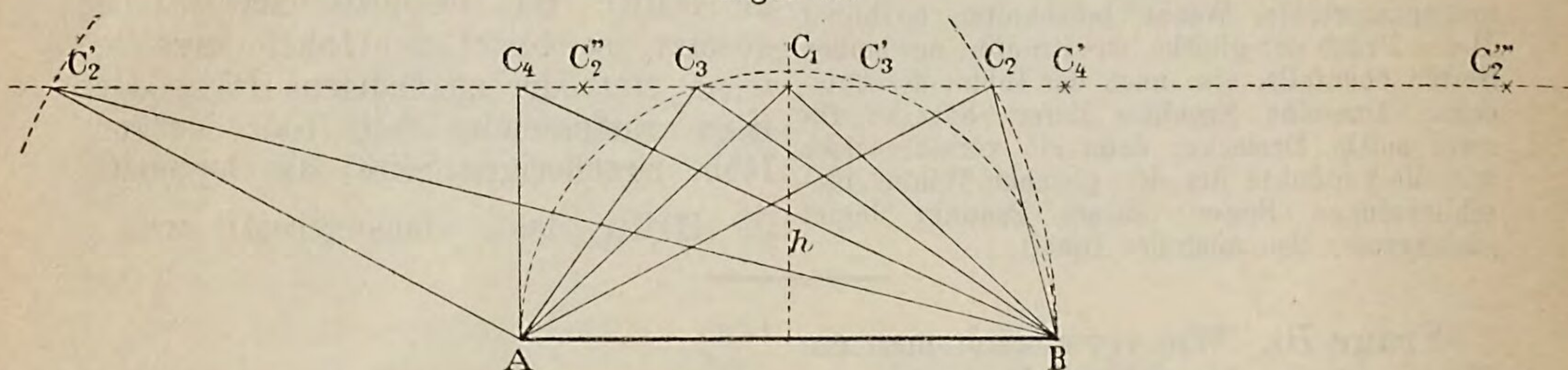
c) Im dritten Falle trage man in den Punkten A und B die gegebene Winkelgrösse an, dann werden durch deren Schenkel auf CD zwei Punkte C und D ausgeschnitten, welche das neue Parallelogramm vervollständigen.

Die Winkel BAC_1 und BAC_2 sind supplementär, denn $AC_1 = AC_2$ bringt $\angle AC_1C_2 = \angle AC_2C_1$. Nun ist $\angle EAC_2 = C_1C_2A$ und $DAC_1 = C_2C_1A$, jedesmal als innere Wechselwinkel. Folglich ist $EAC_2 = DAC_1$ und

$$\angle BAC_2 = 180 - EAC_2 = 180 - C_1AD.$$

Demnach sind ABC_1 und ABC_2 zwei solche Dreiecke, bei denen zwei Seiten gleich und die eingeschlossenen Winkel supplementär, folglich der Inhalt gleichgross ist. Demnach sind auch nicht nur die Höhen von C_1 und C_2 auf AB einander gleich, sondern auch jene von B auf AC_1 und AC_2 .

Figur 55.



Frage 71. Wie wird ein Dreieck unter Beibehaltung der Seite AB verwandelt:

- a) in ein gleichschenkliges mit AB als Grundseite,
- b) in ein gleichschenkliges mit AB als Schenkel,
- c) in ein rechtwinkliges mit AB als Hypotenuse,
- d) in ein rechtwinkliges mit AB als Kathete?

Erkl. 164. Frage a) lässt die einzige Lösung ABC_1 zu.

Frage b) hat ausser den beiden Lösungen ABC_2 und ABC_2' auch noch die beiden Lösungen ABC_2'' und ABC_2''' . Darunter sind aber $ABC_2 \cong ABC_2''$ und $ABC_2' \cong ABC_2'''$, denn sie haben jeweils alle Seiten und Winkel gleich. Die beiden verschiedenen Dreiecke ABC_2 und ABC_2' aber haben wie in voriger Antwort und Figur 54 zwei gleiche Seiten:

$$AB = AC_2 = AC_2'$$

und supplementären eingeschlossenen Winkel:

$$\angle BAC_2' = 180^\circ - \angle BAC_2.$$

Frage c) hat ebenfalls die zwei (ungleichwändig) kongruenten Lösungen ABC_3 und ABC_3' , wenn der Halbkreis über AB die Parallele in zwei Punkten schneidet.

Frage d) hat stets die zwei kongruenten Lösungen ABC_4 und ABC_4' .

Antwort. Die Beantwortung dieser Frage stützt sich auf die Verschiebbarkeit der Spitze des Dreiecks auf der Parallelen zur Grundseite zusammen mit den Eigenschaften des gleichschenkligen bzw. rechtwinkligen Dreiecks, und geschieht folgendermassen:

a) Die Mittelsenkrechte der Strecke AB trifft die Parallele zu AB im Scheitel des gleichschenkligen Dreiecks ABC_1 mit Grundseite AB und Spitze C_1 .

b) Der Kreis mit Mittelpunkt A und Radius AB trifft die Parallele zu AB in zwei Punkten C_2 und C_2' , deren Entfernung von A gleich ist:

$$AC_2 = AC_2' = AB.$$

Also sind ABC_2 und ABC_2' gleichschenklige Dreiecke mit Schenkel AB .

c) Der Kreis mit Durchmesser AB trifft die Parallele zu AB in zwei Punkten C_3 und C_3' , deren jeder der Scheitel eines rechten Winkels AC_3B

Inwiefern von der Beziehung der Seite AB zur gemeinsamen Höhe h aller Dreiecke die Lösbarkeit der vier Fragen abhängt, zeigt die Determination dieser Aufgaben (siehe Aufgabe 248 der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles).

ist. Folglich ist AC_3B ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse AB

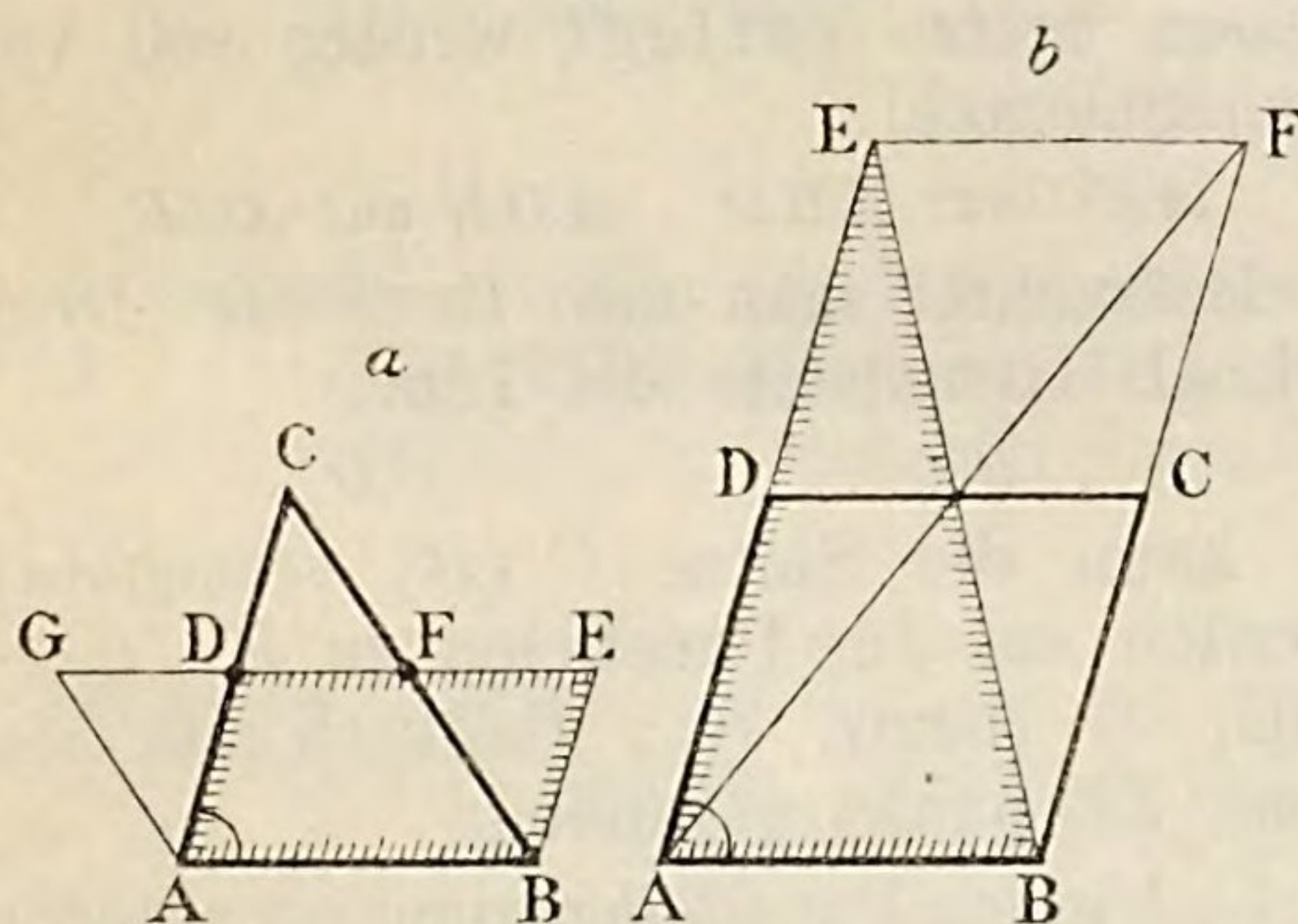
d) Die Senkrechte in A trifft die Parallele zu AB im Punkte C_4 als Eckpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks ABC_4 mit Kathete AB .

Frage 72. Wie verwandelt man unter Beibehaltung einer Seite (oder Höhe) und eines der Winkel

a) ein Dreieck in ein Parallelogramm,

b) ein Parallelogramm in ein Dreieck?

Figur 56.



Erkl. 165. Die Lösung für jede dieser beiden Fragen ist eine doppelte, wenn die Wahl des beizubehaltenden Winkels freigestellt ist. Denn man kann in solchem Falle jede der beiden an die gegebene Seite anstossenden Seiten halbieren bzw. verdoppeln. Man erhält also (siehe Figur 56):

- a) $\triangle ABC = \# \text{gr } ABED (\sphericalangle \alpha)$
 $= \# \text{gr } ABFG (\sphericalangle \beta).$
 b) $\# \text{gr } ABCD = \triangle ABE (\sphericalangle \alpha)$
 $= \triangle ABF (\sphericalangle \beta).$

Frage 73. Wie verwandelt man durch Zeichnung unter Beibehaltung eines Winkels

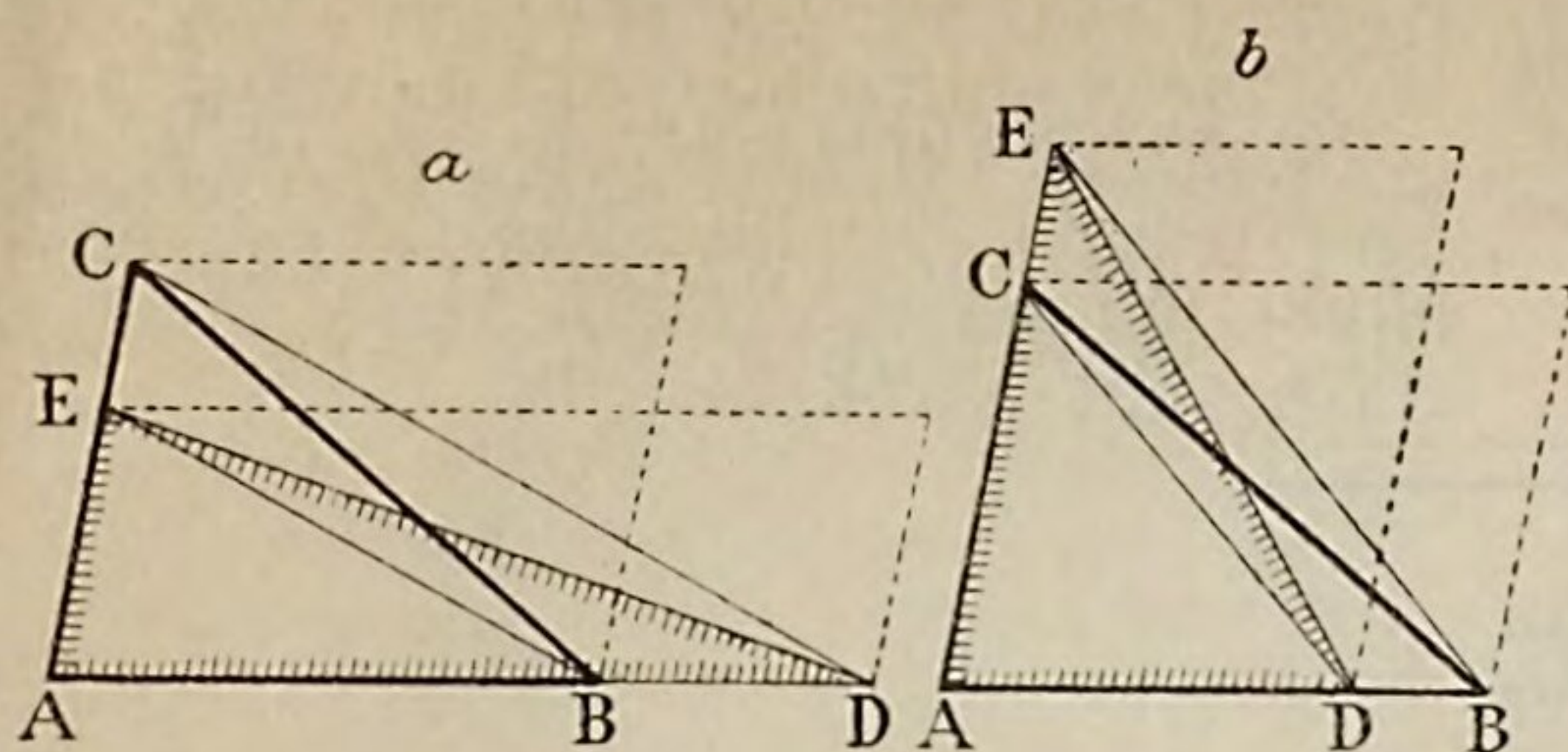
a) ein Dreieck,

b) ein Parallelogramm oder Rechteck

in ein anderes mit gegebener Seite?

Antwort. a) Ist ABC in Figur 57 ein Dreieck, dessen Seite AB die Länge AD (in Figur 57 a grösser als AB , also D ausserhalb AB ; in Figur 57 b kleiner als AB , also D innerhalb AB) erhalten soll, so muss dafür auch der andere Schenkel des Winkels α eine andere Länge AE erhalten, und zwar eine

Figur 57.



Erkl. 166. Man hat nach dem nebenstehenden in:

Figur 57 a:	Figur 57 b:
$\triangle BEC = BED$	$\triangle DCB = DCE$,
folglich Dreieck $ABC =$	
$ABE + BEC$	$ADC + DCB$
$= ABE + BED$	$= ADC + DCE$
$= ADE$	$= ADE$.

Demnach auch ein etwaiges Parallelogramm:

$$2 \cdot ABC = 2 \cdot ADE.$$

Erkl. 167. Die Frage 73 ist dieselbe, wie die Fragen 66, 68 a, 70 a, welche an jenen Stellen durch Berechnung der andern Seite gelöst werden. Die nebenstehende Beantwortung aber sieht von der Längenberechnung vollständig ab und löst die Frage allein durch Konstruktion. Sie gewinnt dadurch die unmittelbare Anwendbarkeit auch auf den Fall, wo die Seiten AB und AD inkommensurabel sind. Umgekehrt folgt aber aus der Beziehung auf die Antworten der obengenannten Fragen, dass auch in den Figuren 57 die Proportion bestehen muss:

$$AB : AD = AE : AC,$$

damit:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE.$$

Diese Gleichung zusammen mit Satz 19 bilden die Hauptgrundlage der Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren (siehe den VI. Teil dieses Lehrbuches).

Frage 74. Wie verwandelt man ein Vieleck in ein anderes, welches eine Ecke weniger hat?

Erkl. 168. Man hat in Figur 58 ähnlich wie oben:

$$\begin{aligned} ABCDEA &= ABCDA + ADE \\ &= ABCDA + ADD_1 = ABCD_1A. \end{aligned}$$

Ist so das Fünfeck in ein Viereck verwandelt, so kann durch Wiederholung dieser Konstruktion daraus ein Dreieck erhalten werden, also allgemein ein n -Eck in ein Dreieck übergeführt werden.

Die Verwandlung eines Vierecks in ein Dreieck ist in Antwort der Frage 72 gezeigt

kürzere oder längere, je nachdem die erste Seite verlängert oder verkürzt wurde.

Verbindet man nun die dem Punkt A zunächst liegenden Eckpunkte:

Figur 57 a:

B und E

Figur 57 b:

C und D ,

so wird von dem ursprünglichen Dreieck ABC abgetrennt ein Dreieck:

ABE

ACD ,

welches unverändert bleibt, und ein Dreieck:

BCE

BCD ,

dessen Spitze verlegt werden soll von dem Schenkel:

AEC auf ABD ADB auf ACE .

Betrachtet man also für dieses Dreieck als Grundseite die Linie:

BE

CD ,

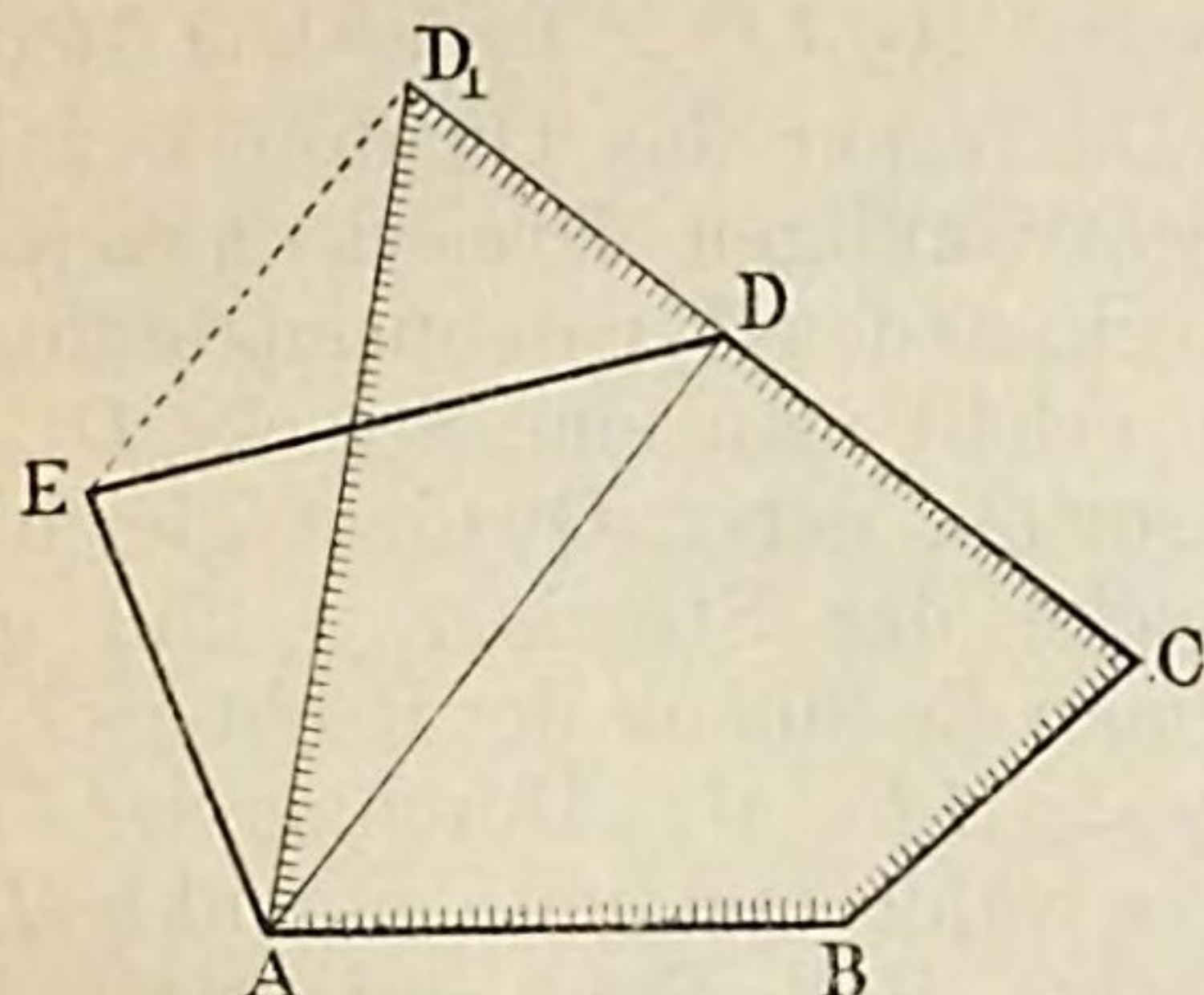
so kann die Spitze C (B) verschoben werden auf der Parallelen zu BE (CD) nach D (bzw. E). Dadurch ist der neue Eckpunkt gefunden.

b) Um ein Parallelogramm oder Rechteck in ein anderes mit gleichem Winkel und gegebener Seite zu verwandeln, hat man nur durch eine Diagonale desselben das Dreieck ABC herzustellen, dieses nach vorigem zu verwandeln und aus dem neuen Dreiecke ADE mit DE als Diagonale das neue Parallelogramm oder Rechteck zu vervollständigen.

Antwort. Um an einem Vieleck $ABCDE$ (siehe Figur 58) etwa die Ecke E zu entfernen, schneidet man aus demselben durch die Diagonale AD das Dreieck ADE ab. Wird nun die Spitze E dieses Dreiecks etwa auf die Verlängerung der Seite CD nach D_1 verlegt, so wird der Winkel CDE zum Winkel $CD D_1 = 180^\circ$, also tritt statt der beiden Ecken D und E nur die eine Ecke D_1 auf.

worden. Auch jene Figur 56 b stimmt mit Figur 58 überein; denn wenn man C mit E und B mit D verbindet, so wird $BD \parallel CE$, C ist die abgeschnittene Ecke, welche nach E auf der Verlängerung von AD verlegt wird.

Figur 58.



Zu diesem Zwecke zieht man $ED_1 \parallel AD$, betrachtet AD als Grundseite des Dreiecks ADE , verlegt die Spitze E auf der Parallelen zur Grundseite nach D_1 und verbindet A mit D_1 . Dann ist das Fünfeck $ABCDE =$ Viereck $ABCD_1$.

Frage 75. Wie findet man ein Quadrat, das gleich der Summe oder Differenz zweier gegebenen Quadrate ist?

Erkl. 169. Geometrisch ist der erste Teil der nebenstehenden Aufgabe dadurch zu lösen, dass man auf den Schenkeln eines rechten Winkels die Strecken a und b abträgt und die Verbindungsstrecke der Endpunkte als Hypotenuse c wählt. Für die zweite Aufgabe wird auf dem einen Schenkel des rechten Winkels die Strecke b abgetragen, und um den Endpunkt ein Kreisbogen mit Radius c gezeichnet, der den andern Schenkel schneidet. Dann entsteht auf letzterem die Strecke a .

Rechnungsmässig gibt die erste Aufgabe $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ und ist nur arithmetisch zu lösen: d. h. es muss a^2 und b^2 einzeln berechnet, beide Ergebnisse addiert und aus der Summe die Quadratwurzel gezogen werden. Im zweiten Falle ist $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, was ausser derselben Art auch durch Umformung auf $\sqrt{(c + b)(c - b)}$ gelöst werden kann.

Frage 76. Wie verwandelt man ein Rechteck in ein Quadrat?

Erkl. 170. Welche der beiden nebenstehenden Lösungsarten man in einem praktisch vorliegenden Falle wählen will, wird von den Raumverhältnissen der vorliegenden Zeichnung abhängen. Man kann eine Seite p manchmal nicht um eine andere q verlängern, ohne den verfügbaren Raum zu überschreiten, dagegen wird umgekehrt manchmal eine senkrechte Strecke h diesen Raum überschreiten, während dieselbe

Antwort. Da nach dem pythagoreischen Lehrsatz das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Kathetenquadrate ist, so erhält man eine Strecke, deren Quadrat gleich der Summe zweier gegebenen Quadrate ist, wenn man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks konstruiert, welches je eine Seite der gegebenen Quadrate zu Katheten hat. Und man findet eine Strecke, deren Quadrat gleich der Differenz zweier gegebenen Quadrate ist, wenn man die zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks konstruiert, das als Hypotenuse und erste Kathete die Seiten der beiden gegebenen Quadrate enthält.

Antwort. Um ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln, kann man auf zwei verschiedene Weisen vorgehen, je nachdem man auf Grund des Satzes 12 oder 16 (bezw. 12a und 16a in Antwort 41) verfahren will.

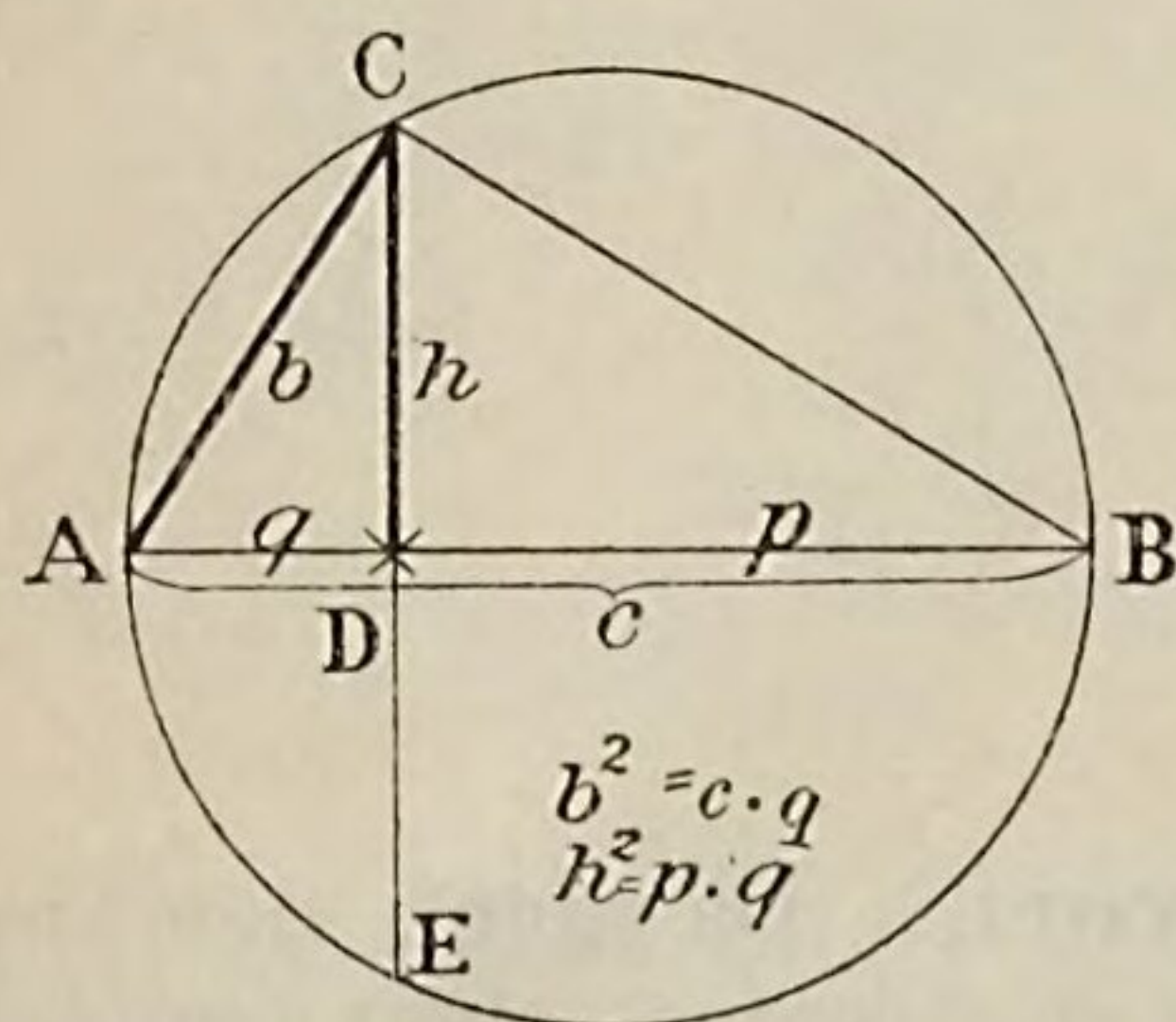
1) Ist $ADGG_1$ in Figur 26 das gegebene Rechteck, so wähle man dessen eine Seitenstrecke $AG_1 = AB$ als Durch-

Strecke in schiefer Lage b noch innerhalb der gegebenen Grenzen liegt. Theoretisch sind selbstverständlich beide Arten vollständig gleichwertig.

Rechnungsmässig ist die Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat die Aufgabe, aus dem Produkt zweier Grössen die Wurzel zu ziehen; denn wenn $b^2 = c \cdot q$ ist, so ist $b = \sqrt{c \cdot q}$.

Wenn $b^2 = c \cdot q$ ist, so gilt auch die Proportion $c : b = b : q$. Und daher nennt man auch b die mittlere Proportionale oder die geometrische Proportionale zwischen c und q , also nebenstehende Konstruktion die Konstruktion der mittleren Proportionale zweier Strecken.

Figur 59.



messer eines Kreises in Figur 59, trage darauf die andere Seite AD ab, und verbinde A mit dem Schnittpunkt C , in welchem die in C errichtete Senkrechte den Kreis trifft. Dann ist $\overline{AC}^2 = AB \cdot AD$ oder wie in Figur 26:

Quadrat $ACJJ_1 = \text{Rechteck } ADGG_1$.

2) Da ferner das Quadrat der Höhe im rechtwinkligen Dreieck gleich dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten ist, so erhält man eine Strecke $DC = h$ in Figur 59, deren Quadrat gleich dem Rechteck der Strecken p und q ist, wenn man die Summe der Rechtecksseiten $p + q = AB$ als Durchmesser eines Kreises wählt und im Teilpunkte D die senkrechte Halbsehne errichtet. Denn dann ist wieder $CD^2 = DA \cdot DB$ oder $h^2 = p \cdot q$.

Frage 77. Wie verwandelt man ein Quadrat in ein Rechteck mit gegebener Seite?

Erkl. 171. Bei der Konstruktion zeichnet man erst das rechtwinklige Dreieck ACD aus b und q bzw. aus h und q , und bringt dann die Verlängerung von AD zum Schnitt mit einer in C auf AC errichteten Senkrechten. Die dadurch entstehende Strecke $AB = c$ bzw. $BD = p$ ist dann die zweite Seite des gesuchten Rechtecks.

Rechnungsmässig stellt diese Auflösung eine einfache Division dar, indem gesucht wird:

$$c = \frac{b^2}{q} \text{ bzw. } p = \frac{h^2}{q}.$$

Als Proportionsaufgabe aufgefasst wird wieder $q : b = b : c$ oder $q : h = h : p$, so dass man c und p als „dritte Proportionale“, und obige Antwort als „Konstruktion der dritten Proportionale“ ansehen kann.

Frage 78. Wie verwandelt man ein Rechteck in ein anderes mit gegebener Seite?

Erkl. 172. Diese Auflösung der bereits in Frage 66 gleichlautend vorliegenden Aufgabe ist eine rein geometrische und deshalb besonders

Antwort. Wenn in Figur 59 die Strecke $AC = b$ bzw. $DC = h$ gegeben, und ebenso etwa $AD = q$, so findet man die gesuchte Strecke $AB = c$ bzw. $DB = p$, indem man die Figur 59 aus den gegebenen Stücken vervollständigt, also je eine der beiden Konstruktionen in Antwort der Frage 76 rückwärts durchführt.

Antwort. Um ein Rechteck in ein anderes mit gegebener Seite zu verwandeln, kann man benützen den Vorbereitungssatz 10 zum pythagoreischen. Ist demnach (siehe Figur 24a und 24b

für solche Fälle anzuwenden, in welchen die neue Rechtecksseite mit den vorigen inkomensurabel ist.

Rechnungsmässig liegt wieder eine einfache Division vor, denn wenn $cq = b \cdot p$ ist, so wird $b = \frac{c \cdot q}{p}$ oder $p = \frac{c \cdot q}{b}$.

Als Proportionsaufgabe ist wieder $p : q = c : b$ bzw. $b : c = q : p$, also Berechnung bzw. Konstruktion der vierten Proportionale zu drei gegebenen Strecken verlangt und geometrisch gelöst.

oder 25) $ADGG_1$ das gegebene Rechteck, so trage man die gegebene Seite des neuen Rechtecks als AF oder AJ_1 unter beliebigem Winkel an, mache dann $AB = AG_1$ und verlängere GD , so werden die Punkte der genannten Figuren erhalten, durch welche entsteht:

$$ADGG_1 = AFJJ_1.$$

(Andere Lösung gibt schon Antw. 73.)

8) Ueber die Teilung der Figuren.

Frage 79. Wie wird ein Parallelogramm in n gleiche Teile geteilt?

Erkl. 173. Die Teilung einer Strecke in n gleiche Teile ist bereits in Antwort 146 des dritten Teiles behandelt worden: Sie geschieht dadurch, dass man auf einer Hilfsstrecke von einem Endpunkt der Strecke aus beliebige n gleichgrosse Teilstrecken abträgt, den letzten mit dem zweiten Endpunkte der zu teilenden Strecke verbindet, und durch die übrigen Teilpunkte zu dieser Verbindungslinie Parallelen zieht. Am genannten Orte wurde (durch zentrische Symmetrie) bewiesen, dass dann je zwei benachbarte der so entstehenden Teilstrecken gleich sein müssen, also jede gleich $\frac{1}{n}$ der Gesamtstrecke.

Antwort. Wenn man bei einem Parallelogramm eine Seite in n gleiche Teile teilt und durch die Teilpunkte zu den andern Parallelseiten parallele Linien zieht, so liegt zwischen je zwei solchen Teilungslinien ein Parallelogramm, dessen Höhe gleich der Höhe des ganzen, dessen Grundseite dagegen gleich dem n -ten Teile der Grundseite des ganzen Parallelogramms ist. War also die Fläche des ganzen Parallelogramms $F = g \cdot h$, so ist die Fläche eines solchen Teilparallelogramms gleich $\frac{g}{n} \cdot h$ oder gleich $\frac{1}{n} \cdot F$.

Frage 80. Wie wird ein Dreieck in n gleiche Teile geteilt?

Erkl. 174. Insbesondere ist zu nebenstehender Antwort zu bemerken, dass jede Mittellinie eines Dreiecks dasselbe in zwei gleichgrosse Flächen teilt (vergleiche auch noch Aufgabe 280).

Von den n Teildreiecken eines Dreiecks ist das die Höhe enthaltende oder der Höhe zunächstliegende das mit dem geringsten Umfange. Denn für jedes folgende wird jede Seite stets grösser (weil schiefer) als die Seiten des vorhergehenden, also ebenso auch der Umfang. Dementsprechend erscheinen die der Höhe naheliegenden Teildreiecke kürzer und breiter, die fernerliegenden länger und schmaler, obwohl sämtliche gleiche Grundseite und Fläche haben.

Antwort. Wenn man bei einem Dreieck eine beliebige Seite in n gleiche Teile teilt und die Teilpunkte mit der gegenüberliegenden Ecke verbindet, so liegt zwischen je zweien dieser Verbindungslinien ein Dreieck, welches dieselbe Höhe hat, wie das ganze, aber als Grundseite den n -ten Teil der Grundseite des ganzen. Demnach ist wieder, wie oben, die Fläche des ganzen Dreiecks $F = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$, und die Fläche eines solchen Teildreiecks gleich:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{n} \cdot h = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} \cdot g \cdot h \right) = \frac{1}{n} \cdot F.$$

Frage 81. Wie wird ein Dreieck in n gleiche Teile geteilt, wenn die Teilungslinien einer Seite parallel sein sollen?

Antwort. Um ein Dreieck durch Parallele zur Seite c in n gleiche Teile

Erkl. 175. Wenn in Figur 60 n Teilstrecken der Seite a entstehen, so heisst der letzte Teilstreckpunkt innerhalb CB D_{n-1} , und B ist D_n ; folglich ist:

$$\overline{CE}_{n-1}^2 = CD_{n-1} \cdot CB$$

und

$$\begin{aligned} \overline{CE}_{n-1}^2 : \overline{CB}^2 &= CD_{n-1} : CB = (n-1) : n \\ &= CD_{n-1} : CB = (n-1) : n. \end{aligned}$$

Die nebenstehende Durchführung gilt daher unmittelbar allgemein für eine beliebige Zahl n , während Figur 60 den Einzelfall $n = 4$ aufweist.

Aus der fortlaufenden Proportion:

$CF_1 G_1 : CF_2 G_2 : \dots : CBA = 1 : 2 : 3 : \dots : n$
erhält man einzeln:

$$CF_1 G_1 : CF_2 G_2 = 1 : 2,$$

also:

$$CF_2 G_2 = 2 \cdot CF_1 G_1$$

oder:

$$GF_2 G_2 - CF_1 G_1 = CF_1 G_1;$$

also Dreieck $CF_1 G_1$ gleich Trapez $F_1 G_1 F_2 G_2$.

Ebenso weiter:

$$CF_1 G_1 : CF_3 G_3 = 1 : 3,$$

also:

$$CF_3 G_3 = 3 \cdot CF_1 G_1$$

oder:

$$CF_3 G_3 - 2 \cdot CF_1 G_1 =$$

$$CF_3 G_3 - F_1 G_1 F_2 G_2 = CF_1 G_1;$$

also Dreieck $CF_1 G_1$ gleich Trapez $F_3 G_3 F_2 G_2$
u. s. w.

Erkl. 176. Dass nicht etwa eine Teilung der Höhe oder Seite in n gleiche Teile unmittelbar die Teilung des Dreiecks lieferte, erkennt man daraus, dass Dreiecke mit Seiten $CD_1, CD_2, \dots$, deren dritte Seite $\parallel c$ wäre, wegen ihrer ebenfalls gleichgrossen Winkel α, β, γ , sich verhalten würden wie:

$$\begin{aligned} \overline{CD}_1^2 : \overline{CD}_2^2 : \dots &= 1^2 : 2^2 : 3^2 : \dots : n^2 \\ &= 1 : 4 : 9 : \dots : n^2 \end{aligned}$$

statt wie $1 : 2 : 3 : \dots : n$. Demnach würden auch die entstehenden Trapeze nicht gleichgross sein, sondern sich verhalten wie:

$$1 : 3 : 5 : 7 : \dots : (2n-1).$$

Dagegen ist in Figur 60:

$$\begin{aligned} CF_1 : CF_2 : CF_3 : \dots : CB \\ &= F_1 G_1 : F_2 G_2 : F_3 G_3 : \dots : AB \\ &= CG_1 : CG_2 : CG_3 : \dots : CA \\ &= 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} : \dots : \sqrt{n}. \end{aligned}$$

zu teilen, teilt man zunächst eine andere Seite a in n gleiche Teile, errichtet über derselben den Halbkreis und die senkrechten Halbsehnern in den Teilpunkten des Durchmessers. Die Schnittpunkte E mit dem Kreise verbindet man mit einem Endpunkte C des Durchmessers und trägt diese Längen von C aus auf a ab. Die Parallelen zu c durch die so entstehenden neuen Teilpunkte auf a besitzen die verlangte Eigenschaft. Denn in Figur 60 (wo $n = 4$ gesetzt) hat man nach Satz 12 a:

$\overline{CE}_1^2 = CD_1 \cdot CB, \overline{CE}_2^2 = CD_2 \cdot CB$ u. s. w.,
also:

$$\begin{aligned} \overline{CE}_1^2 : \overline{CE}_2^2 : \overline{CE}_3^2 : \dots : \overline{CB}^2 &= \\ CD_1 : CD_2 : CD_3 : \dots : CB &= 1 : 2 : 3 : \dots : n. \end{aligned}$$

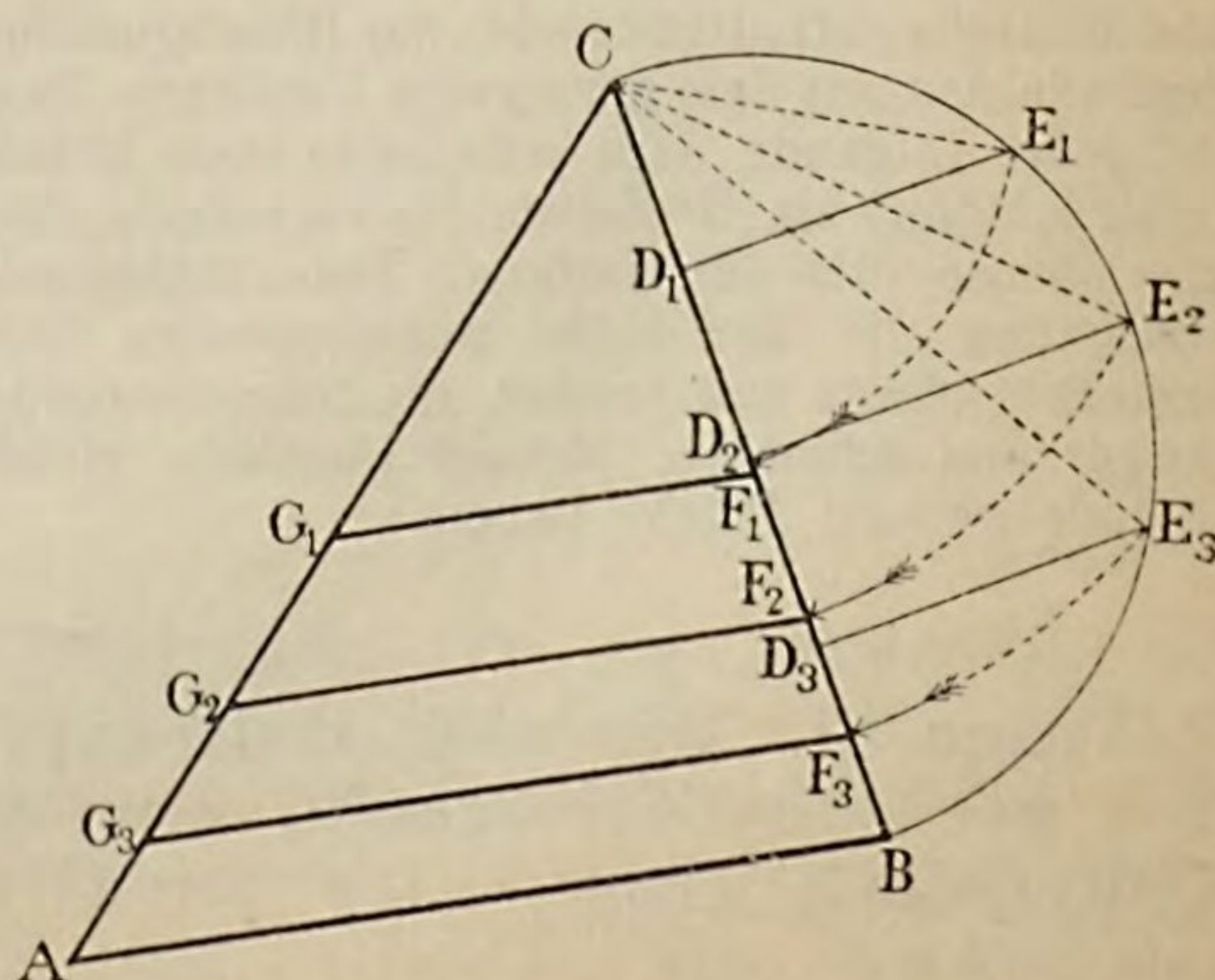
Die Dreiecke $CF_1 G_1, CF_2 G_2, \dots$, welche durch die Parallelen abgeschnitten werden, besitzen aber sämtliche dieselben drei Winkel α, β, γ ; ihre Flächen verhalten sich also nach Satz 19 wie die Quadrate der Strecken $CF_1, CF_2, CF_3, \dots$. Da aber $CF_1 = CE_1, CF_2 = CE_2, \dots$ abgetragen wurde, so verhält sich:

$$\begin{aligned} CF_1 G_1 : CF_2 G_2 : \dots : CBA &= \\ \overline{CE}_1^2 : \overline{CE}_2^2 : \dots : \overline{CB}^2 &= 1 : 2 : 3 : \dots : n. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich endlich (vergl. Erkl. 175):

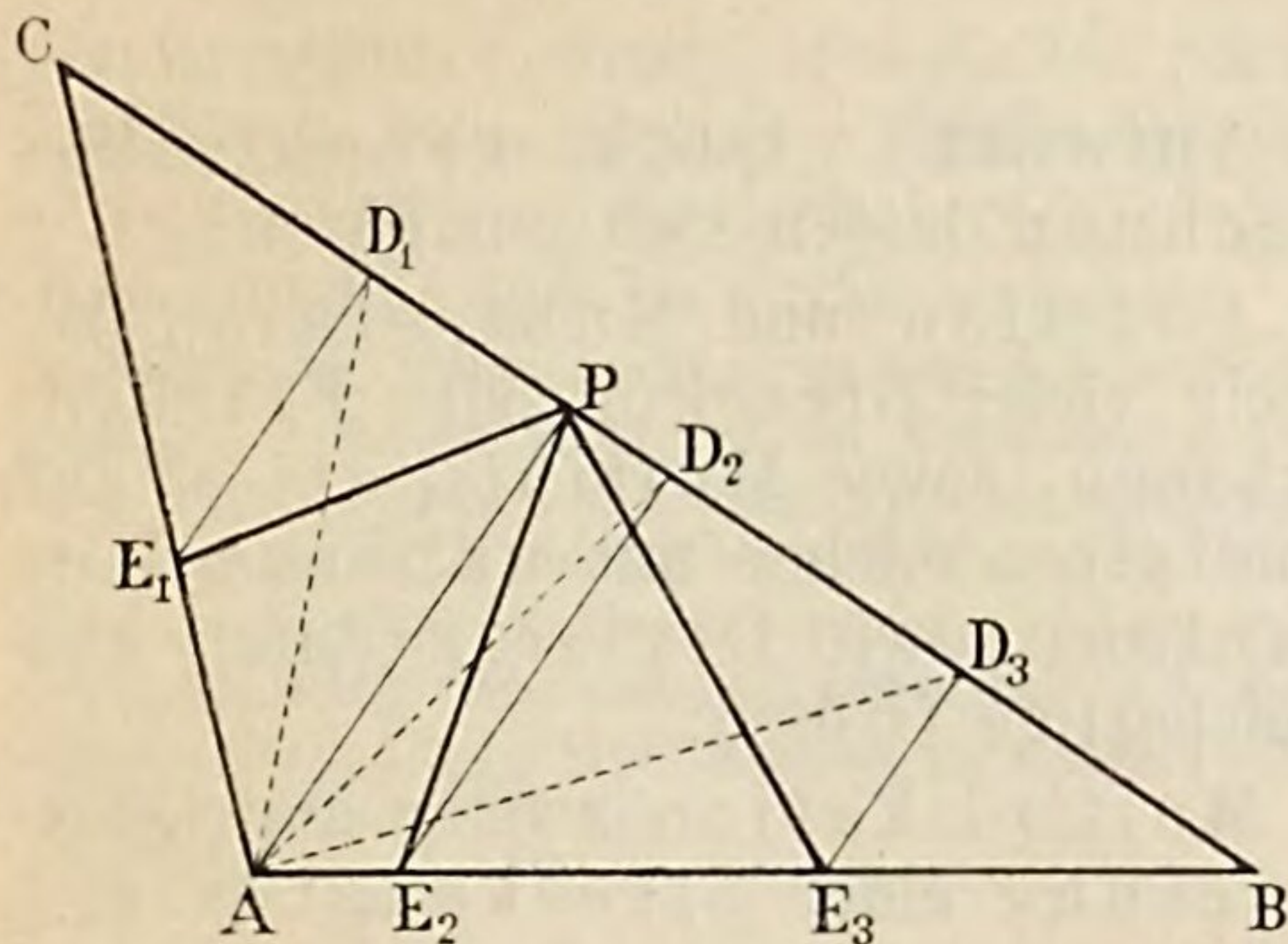
$$\begin{aligned} \triangle CF_1 G_1 &= \text{Trapez } F_1 G_1 F_2 G_2 \\ &= \text{Trapez } F_2 G_2 F_3 G_3 \dots \\ &= \text{Trapez } F_{n-1} G_{n-1} B A. \\ &= \frac{1}{n} ABC. \end{aligned}$$

Figur 60.



Frage 82. Wie wird ein Dreieck in n gleiche Teile geteilt, wenn die Teilungslinien durch einen gegebenen Punkt auf einer Dreiecksseite gehen sollen?

Figur 61.



Erkl. 177. Wenn in Figur 61 n Teilungstrecken auf der Seite a entstehen, so heisst C auch D_0 oder E_0 ; der letzte Teilpunkt innerhalb CB heisst D_{n-1} , auf AB aber E_{n-1} ; B ist D_n oder E_n . Für jedes der Dreiecke mit der Grundseite AP wird die Spitze D_x verschoben auf einer der vielen Parallelen zu AP nach E_x , also stets $APD_x = APE_x$. Auch hier gilt also die nebenstehende Durchführung allgemein, nicht bloss für den in Figur 61 dargestellten Fall $n = 4$.

Die den Punkt A zwischen sich einschliessenden Teilungslinien (PE_1 und PE_2 in Figur 61) sind die einzigen, welche ein Viereck bilden statt eines Dreiecks.

Fällt Punkt P in eine der Ecken C oder B , so werden die Parallelen zu AP parallel einer Seite und erzeugen die in Antwort der Frage 80 bereits gefundenen Teilpunkte auf der andern Seite, der Gegenseite jener Ecke.

Fällt Punkt P auf einen der Teilpunkte der Seite a selbst, so wird die Verbindungslinie AP auch selbst eine der Strecken PE , und es entsteht kein Viereck unter den Teilflächen, weil eben eine der Teilungslinien als PA selbst durch Ecke A geht.

Antwort. Um ein Dreieck durch Linien von dem auf Seite a liegenden Punkte P aus in n gleiche Teile zu teilen, teilt man zunächst diese Seite a selbst in n gleiche Teile, verbindet den Punkt P mit der Ecke A und zieht durch die Teilpunkte auf a Parallele zu dieser Verbindungslinie. Die Verbindungslinien von P mit den gegenüberliegenden Schnittpunkten dieser Parallelen sind die verlangten Teilungslinien. Denn in Figur 61 (wo wieder $n = 4$ gesetzt) hat man durch die Teilungslinien AD_1 , $AD_2 \dots$ nach Antwort der Frage 80:

$$ACD_1 = AD_1D_2 = AD_2D_3 \dots = \frac{1}{n} \cdot ABC.$$

Nach Antwort der Frage 16 und Figur 7 ist aber wegen gleicher Grundseite AP und Höhe:

$$\triangle APD_1 = APE_1, \quad APD_2 = APE_2, \\ APD_3 = APE_3 \dots,$$

also:

$$\begin{aligned} ACD_1 &= APC - APD_1 = APC - APE_1 \\ &= PCE_1 = \frac{1}{n} ABC, \\ AD_1D_2 &= APD_1 + APD_2 = APE_1 + APE_2 \\ &= PE_1AE_2P = \frac{1}{n} ABC, \\ AD_2D_3 &= APD_3 - APD_2 = APE_3 - APE_2 \\ &= PE_2E_3 = \frac{1}{n} ABC \quad \text{u. s. w., bis} \\ AD_{n-1}B &= APB - APD_{n-1} \\ &= APB - APE_{n-1} \\ &= PE_{n-1}B = \frac{1}{n} ABC. \end{aligned}$$

Demnach allgemein:

$$PCE_1 = PE_1AE_2 = PE_2E_3 \\ = PE_3E_4 \dots = PE_{n-1}B.$$

9) Ueber das graphische Rechnen.

Frage 83. Was versteht man unter graphischem Rechnen?

Erkl. 178. Das Wort graphisch stammt vom griechischen Worte $\gammaράφω$, schreiben, zeichnen, konstruieren, und ist dasselbe, welches auch enthalten ist in den Wörtern Telegraph (Fern-

Antwort. Unter graphischem Rechnen versteht man die Ausführung derjenigen Rechnungsoperationen mit Strecken oder Flächen durch Konstruktion oder Zeichnung, welche

schreiber), Photograph (Lichtschreiber), Lithograph (Steinschreiber) u. s. w.

mit den Masszahlen dieser Strecken oder Flächen durch Rechnung auszuführen sind.

Frage 84. Welche Rechnungsoperationen können durch das graphische Rechnen ausgeführt werden?

Erkl. 179. Schon im ersten Abschnitte dieses Teiles wurde ausgeführt, dass das Produkt (zweite Potenz) zweier Strecken geometrisch dargestellt wird durch das Rechteck (Quadrat), welches die beiden Strecken zu Seiten hat, also allgemein ein Produkt zweier Strecken durch eine Fläche, und demnach umgekehrt der Quotient einer Flächengrösse durch eine Länge oder auch die Quadratwurzel aus einer Flächengrösse durch eine Strecke.

Multiplikation von mehr als zwei Streckengrössen oder gar Flächen lässt durch planimetrische Darstellung keine Deutung mehr zu: daher die Beschränkung nebenstehender Aufzählung auf Grössen zweiter oder erster Dimension.

Antwort. Durch graphisches Rechnen lassen sich ausführen:

Addition und Subtraktion beliebig vieler Strecken oder Flächengrössen, sowie Multiplikation und Division solcher mit unbenannten Zahlen, sowie Division durch eine gleichartige Grösse;

Multiplikation zweier und Quadrierung einer Streckengrösse;

Division von Flächengrössen durch Längen;

Quadratwurzelziehen aus Flächengrössen, sowie die Konstruktion der durch Zusammensetzung solcher Operationen entstehenden algebraischen Ausdrücke.

Frage 85. Wie gestaltet sich geometrisch die Addition und Subtraktion?

Erkl. 180. Die Addition oder Subtraktion von Flächen in der nebenstehenden Weise ergibt in der Regel unregelmässig gestaltete Vielecke. Es ist daher vorteilhaft, solche zu addierenden oder zu subtrahierenden Flächen erst zu verwandeln in Rechtecke mit einer gemeinsamen Seite oder in Dreiecke mit einer gleichen Höhe u. s. w., um auch nach der Addition und Subtraktion wieder ein Rechteck bzw. Dreieck zu erhalten.

Die Grundformeln nebenstehender Antwort lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

Strecke $\pm$ Strecke = Strecke,

Fläche $\pm$ Fläche = Fläche;

Strecke $\cdot$ Zahl = Strecke,

Strecke : Strecke = Zahl,

Strecke : Zahl = Strecke;

Fläche $\cdot$ Zahl = Fläche,

Fläche : Fläche = Zahl,

Fläche : Zahl = Fläche.

Antwort. Um Strecken zu addieren oder zu subtrahieren, wird die eine um eine andere verlängert oder verkürzt; um Flächen zu addieren oder zu subtrahieren, wird die zweite ausserhalb oder innerhalb der ersten angetragen und beide zusammen oder der unbedeckt bleibende Teil der grösseren als Summe bzw. Differenz erhalten.

Wiederholte Addition bzw. Subtraktion einer gleichen Strecke oder Fläche ergibt Multiplikation der letzteren mit der Anzahl dieser Wiederholungen, bzw. Division der ursprünglichen Grösse durch die abgetragene Grösse.

Teilung einer Strecke oder Fläche in mehrfache gleiche Teile ergibt Division durch die Masszahl der Teilgrösse.

Frage 86. Wie gestaltet sich geometrisch die Multiplikation von Strecken nebst den zugehörigen Rechnungsarten?

Erkl. 181. Auch der nebenstehenden Antwort liegen Grundformeln folgender Art unter:
 $\text{Strecke} \cdot \text{Strecke} = \text{Fläche}$, $(\text{Strecke})^2 = \text{Fläche}$;
 $\text{Fläche} : \text{Strecke} = \text{Strecke}$, $\sqrt{\text{Fläche}} = \text{Strecke}$.

Zur Ausführung dieser graphischen Rechnungsaufgaben sind nach Nebenstehendem erforderlich die Verwandlungen verschiedener gegebener Flächen zunächst im Rechtecke, dann in solche, wovon eine Seite gegeben ist, dann die Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat. Dies sind also im Gegensatze zu voriger Antwort sämtlich Operationen der zweiten Dimension, während jene Operationen der ersten (bezw. nullten) Dimension sind.

Antwort. Eine Strecke wird mit einer Strecke multipliziert, indem man die Fläche des Rechtecks herstellt, welches die beiden Strecken zu Seiten hat; also wird eine Strecke mit sich selbst multipliziert durch Konstruktion ihres Quadrats.

Umgekehrt wird eine Flächengrösse durch eine Strecke dividiert, indem man jene Fläche verwandelt in ein Rechteck, welches die gegebene Strecke (den Divisor) als eine Seite hat. Die entstehende andere Seite des Rechtecks ist der Quotient.

Endlich erhält man die Quadratwurzel aus einer Flächengrösse, indem man dieselbe in ein Quadrat verwandelt und so die Länge einer Seitenstrecke als Wurzel findet.

Frage 87. Was für zusammengesetzte algebraische Ausdrücke lassen sich geometrisch darstellen?

Erkl. 182. Da $\frac{\text{Strecke}}{\text{Strecke}} = \text{Zahl}$ ist und ein Ausdruck der Form $\text{Zahl} \cdot \text{Strecke}$ gebildet werden kann, so kann auch gebildet werden:

$$\frac{\text{Strecke} \cdot \text{Strecke}}{\text{Strecke}}$$

oder:

$$\frac{\text{Strecke} \cdot \text{Strecke} \cdot \text{Strecke}}{\text{Strecke} \cdot \text{Strecke}}$$

oder:

$$\frac{\text{Fläche} \cdot \text{Strecke}}{\text{Strecke} \cdot \text{Strecke}},$$

was jeweils eine Strecke ergibt. So ist ein Ausdruck:

$$x = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{e \cdot f \cdot g}$$

zu bilden, indem man etwa erst bildet die Strecke $m = \frac{a \cdot b}{e}$, dann die Strecke $n = \frac{c \cdot d}{f}$

und endlich die Strecke $x = \frac{m \cdot n}{g}$.

Erkl. 182a. Es darf aber in einem solchen Bruche auch die Anzahl der Faktoren des Zählers die des Nenners um zwei übersteigen. Denn da $\text{Fläche} \cdot \text{Zahl} = \text{Fläche}$ ist, so kann auch in dem Ausdruck $\text{Fläche} \cdot \text{Zahl}$ diese Zahl beliebig oft durch einen Quotienten $\frac{\text{Strecke}}{\text{Strecke}}$

Antwort. Es lassen sich alle diejenigen algebraischen Ausdrücke geometrisch deuten, bzw. durch Konstruktion herstellen, welche sich aus Summen und Differenzen, Produkten und Quotienten, zweiten Potenzen oder Quadratwurzeln in der Weise zusammensetzen, dass die zweite Dimension im Ergebnis nicht überschritten wird. Ein solcher Ausdruck in allgemeiner Form wäre etwa:

$$\frac{2a^2}{b} \cdot \sqrt{3c^2 + \frac{4def^3}{5gh^2} - i\sqrt{6kl}}.$$

Dazu wäre erst zu bilden das Quadrat c^2 und das Dreifache dieser Fläche. Sodann das Rechteck $d \cdot e$ und durch Verwandlung desselben in ein Rechteck mit Seite g die Grösse $m = \frac{d \cdot e}{g}$ als dessen zweite Seite. Ferner das Quadrat f^2 und durch Verwandlung desselben in ein Rechteck mit Seite h die Grösse $n = \frac{f^2}{h}$ als dessen zweite Seite. Weiter das Rechteck $m \cdot n = \frac{d \cdot e}{g} \cdot \frac{f^2}{h}$ und durch Verwandlung desselben in ein Rechteck mit Seite h die Grösse:

oder $\frac{\text{Fläche}}{\text{Fläche}}$ ersetzt werden. So entstehen Ausdrücke der Art:

$$\frac{\text{Fläche} \cdot \text{Strecke}}{\text{Strecke}},$$

$$\frac{\text{Fläche} \cdot \text{Strecke} \cdot \text{Strecke}}{\text{Strecke} \cdot \text{Strecke}},$$

$$\frac{\text{Fläche} \cdot \text{Fläche}}{\text{Fläche}} \text{ u. s. w.,}$$

was jeweils eine Fläche ergibt. So ist ein Ausdruck:

$$\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{c \cdot f}$$

zu bilden, indem man etwa erst bildet die Strecke $m = \frac{a \cdot b}{c}$, dann $n = \frac{c \cdot d}{f}$ und endlich die Fläche $m \cdot n$. Oder man erhält einen Ausdruck:

$$\frac{F_1 \cdot F_2}{F_3},$$

indem man erst etwa F_3 als Rechteck $k \cdot l$ darstellt, dann die Strecken $m = \frac{F_1}{k}$ und $n = \frac{F_2}{l}$ und zuletzt die Fläche $m \cdot n$.

Erkl. 183. Es ist zu beachten, dass Ausdrücke, welche addiert oder subtrahiert werden sollen, gleichartig sein müssen, d. h. von derselben Dimension. Denn nur Fläche $\pm$ Fläche oder Strecke $\pm$ Strecke kann gebildet werden, nicht aber Fläche $\pm$ Strecke. So ist in dem nebenstehend behandelten Ausdruck innerhalb der Wurzel: $3c^2$ von zweiter Dimension, $4def^3$ von fünfter, der Nenner $5gh^2$ von dritter, also der Quotient wieder von zweiter Dimension; der Radikand $6kl$ von zweiter, die $\sqrt{6kl}$ also von erster und das Produkt $i \cdot \sqrt{6kl}$ wieder von zweiter Dimension.

Frage 88. In welchen Fällen wird die graphische Darstellung algebraischer Ausdrücke besonders einfach?

Erkl. 184. In den nebenstehenden Fällen, welche sich aus den Ergebnissen der Abschnitte 4, 5, 6 leicht vermehren liessen, besteht die Erleichterung darin, dass man nicht alle Einzelposten des gegebenen Ausdruckes zu konstruieren braucht, z. B. nicht einzeln zu bilden

$$p = \frac{m \cdot n}{h} = \frac{d \cdot e}{g} \cdot \frac{f^2}{h} \cdot \frac{1}{h}$$

als dessen zweite Seite. Endlich wäre aus dieser Grösse p mit Strecke f ein Rechteck zu bilden $p \cdot f$ und davon nach Teilung in fünf gleiche Teile ein Fünftel abzuschneiden. So entsteht $\frac{4d \cdot e \cdot f^3}{5g \cdot h^2}$ als zweiter Posten des Radikanden. Zuletzt hat man zu konstruieren das Rechteck $k \cdot l$, dieses zu versechsfachen und die erhaltene Fläche in ein Quadrat zu verwandeln. Der Längenwert dieser Quadratseite wäre $\sqrt{6kl}$, und das Rechteck aus dieser Quadratseite und der Strecke i ist der dritte Posten des Radikanden.

Die Summe der beiden ersten Posten wird sodann um den dritten vermindert, die erhaltene Fläche in ein Quadrat verwandelt und dessen Seite als Wurzelwert w erhalten. Bildet man noch das Quadrat a^2 , verwandelt es in ein Rechteck mit Seite b , so ist die zweite Seite dieses Rechtecks $= \frac{a^2}{b}$, und der Gesamtausdruck entsteht, wenn aus der doppelten Länge dieser Seite und der Strecke w ein Rechteck gebildet wird.

Antwort. Die graphische Darstellung wird besonders bei solchen Ausdrücken eine einfache Konstruktion gestatten, wo diese Ausdrücke sich als Werte irgend einer leicht zu konstruierenden einzelnen Strecke oder Fläche einer bestimmten Figur herausstellen. So ist z. B.:

$$\sqrt{a^2 \pm b^2}$$

die Hypotenuse bzw. Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit Seiten a und b ;

hat das Quadrat a^2 , Quadrat b^2 , Rechteck ap , letzteres verdoppelt $2ap$, alle drei addiert und die Summe in ein Quadrat verwandelt ... Beim letzten der nebenstehenden Ausdrücke:

$\frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$
wäre es gar nicht einmal möglich, den Radikanden zu bilden. Vielmehr müsste erst etwa das Rechteck:

$$(a+b+c)(-a+b+c)$$

gebildet und in ein Quadrat (Seite m) verwandelt werden, dann ebenso das Rechteck:

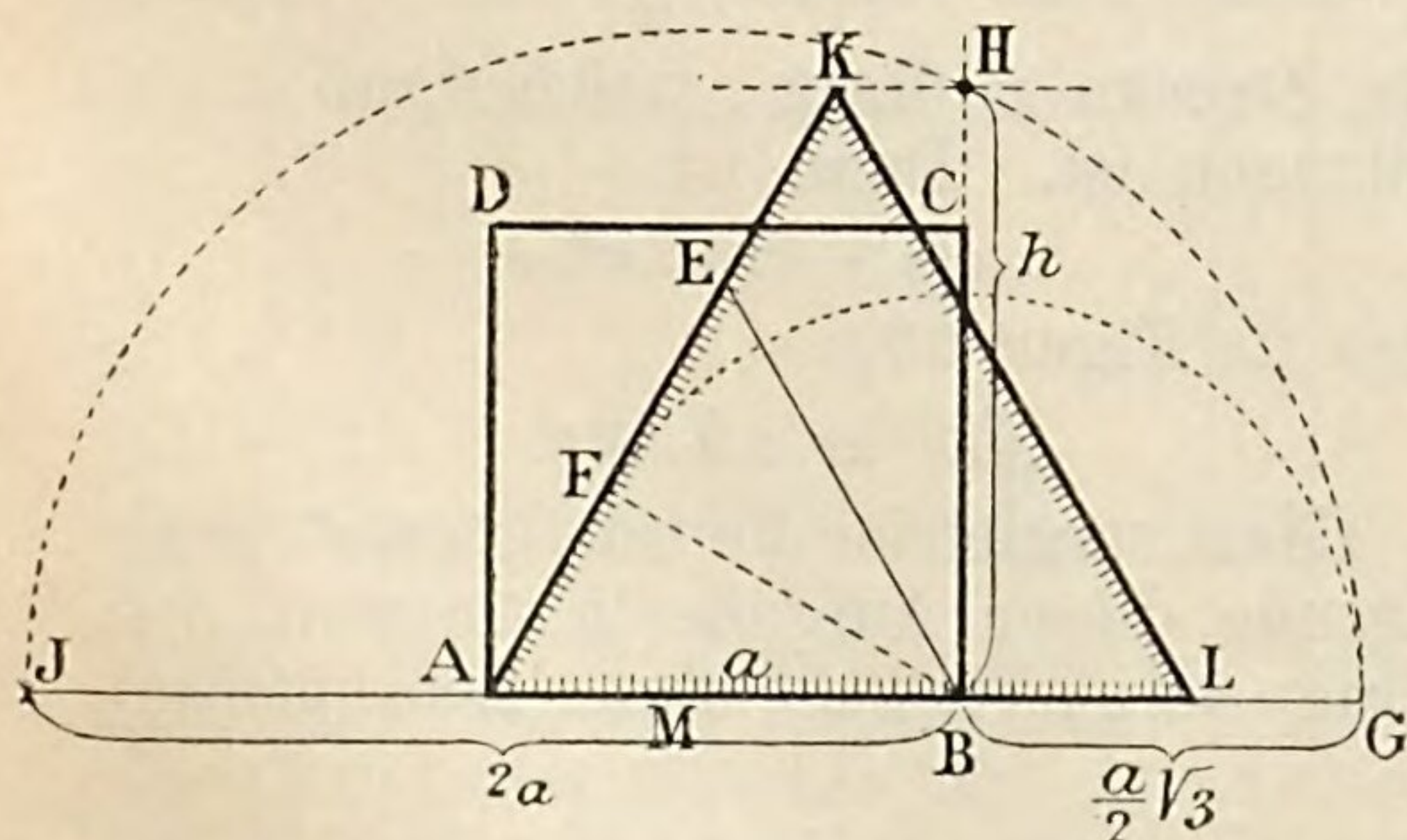
$$(a-b+c)(a+b-c)$$

in ein Quadrat (mit Seite n), um endlich das Rechteck aus den Hälften dieser beiden Quadratseiten m und n zu erhalten mit Fläche:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \cdot \frac{n}{2} &= \frac{1}{4} \cdot mn = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)} \cdot \sqrt{(a-b+c)(a+b-c)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}. \end{aligned}$$

Frage 89. Wie kann das graphische Rechnen zu Verwandlungsaufgaben verwandt werden, z. B. um ein Quadrat in ein gleichseitiges Dreieck zu verwandeln?

Figur 62.



Erkl. 185. In Figur 62 ist zunächst:

$$ABCD = a^2,$$

ABE das gleichseitige Dreieck mit Seite a ; und dessen Höhe:

$$BF = \frac{a}{2} \sqrt{3} = BG$$

abgetragen, und $AJ = AB = a$; also:

$$BJ = 2a, \quad BG = \frac{a}{2} \sqrt{3};$$

M Mittelpunkt von JG , BH senkrecht JG im Teilpunkte, also:

$$\overline{BH}^2 = BJ \cdot BG = 2a \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = a^2 \sqrt{3}.$$

Folglich ist die Ecke des gesuchten Dreiecks der Schnittpunkt K , in welchem die verlängerte

Sachs, Ebene Elementar-Geometrie. V.

$$a^2 + b^2 \pm 2ab$$

die Quadratfläche mit Seite $a \pm b$;

$$\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ap}$$

die dritte Seite eines stumpf- bzw. spitzwinkligen Dreiecks mit den Seiten a und b und der Projektion p von b auf a ;

$$\frac{a}{2} \sqrt{3}$$

die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit Seite a ;

$$\frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

die Fläche eines Dreiecks mit Seiten a, b, c .

Antwort. Wenn die Höhe des Quadrats a ist und jene des gesuchten gleichseitigen Dreiecks h , so ist der Inhalt des Quadrats a^2 , der des gleichseitigen Dreiecks aber nach Antwort der Frage 59 gleich $\frac{h^2}{\sqrt{3}}$. Es wird also:

$$a^2 = \frac{h^2}{\sqrt{3}} \quad \text{oder} \quad h^2 = a^2 \cdot \sqrt{3}.$$

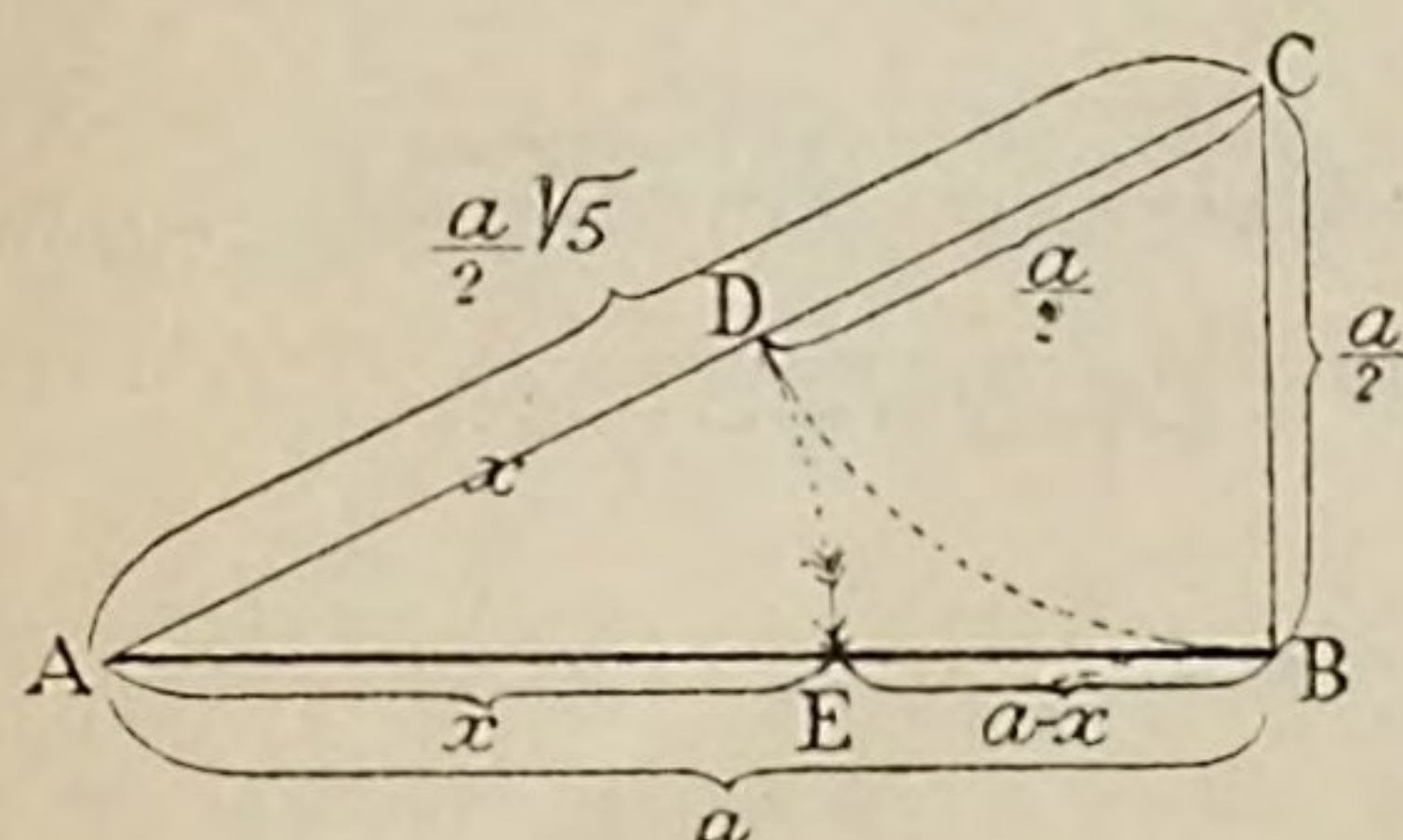
Man erhält also die Seite des gesuchten gleichseitigen Dreiecks, wenn man den Ausdruck $a^2 \sqrt{3}$ als Quadrat mit Seite h konstruiert. Nun ist $\frac{a}{2} \sqrt{3}$ die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit Seite a , $a^2 \sqrt{3}$ aber $= 2a \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3}$. Konstruiert man also (siehe Figur 62) jenes gleichseitige Dreieck über der Seite a , trägt seine Höhe in der Verlängerung der Quadratseite an und konstruiert die Halbsehne im Halbkreise über dem Durchmesser $2a + \frac{a}{2} \sqrt{3}$, so ist diese Senkrechte die Höhe des gesuchten gleichseitigen Dreiecks.

Seite AE die durch H zu AB gezogene Parallele HK trifft. Und es wird:

$$\triangle AKL = \square ABCD.$$

Frage 90. Wie kann das graphische Rechnen zu Teilungsaufgaben verwendet werden, z. B. um eine Strecke nach dem „goldenen Schnitte“ zu teilen, d. h. so, dass das Quadrat des einen Abschnitts gleich sei dem Rechteck aus dem andern Abschnitt und der ganzen Strecke?

Figur 63.



Erkl. 186. Die Lösung der quadratischen Gleichung geschieht folgendermassen:

$$x^2 + px + q = 0,$$

$$x^2 + px = -q,$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = -q + \frac{p^2}{4}$$

oder:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

In nebenstehender Gleichung:

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

ist $p = a$, $q = -a^2$, also:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a}{2}(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Jedoch ist es zur Konstruktion vorteilhafter, die unentwickelte Formel auszuführen.

Frage 91. Wie kann das graphische Rechnen zu allgemeinen Konstruktionsaufgaben verwendet werden, z. B. ein Dreieck zu zeichnen aus einer Seite, der zugehörigen Höhe und der Differenz der zwei andern Seiten: c , h_c , $a - b = d$?

Antwort. Wenn der eine Abschnitt x ist, so ist der andere $a - x$, also das Quadrat x^2 gleich dem Rechteck $a(a - x)$. Darum wird:

$$x^2 = a^2 - ax \quad \text{oder} \quad x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung gibt:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}.$$

Um diese Strecke x zu konstruieren, zeichnet man zunächst ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten a und $\frac{a}{2}$, dann ist dessen Hypotenuse:

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a}{2} \sqrt{5}.$$

Zieht man davon $\frac{a}{2}$ ab, so bleibt die Strecke x übrig, welche auf a abzutragen ist. Dann ist:

$$a(a - x) = x^2,$$

also in Figur 63:

$$\overline{AE}^2 = AB \cdot EB.$$

(Man vergleiche die rein geometrische Lösung dieser Aufgabe in Antwort der Frage 68 im VI. Teile dieses Lehrbuches.)

Antwort. Da nach der Antwort der Frage 44 die Höhe h_c den Wert hat:

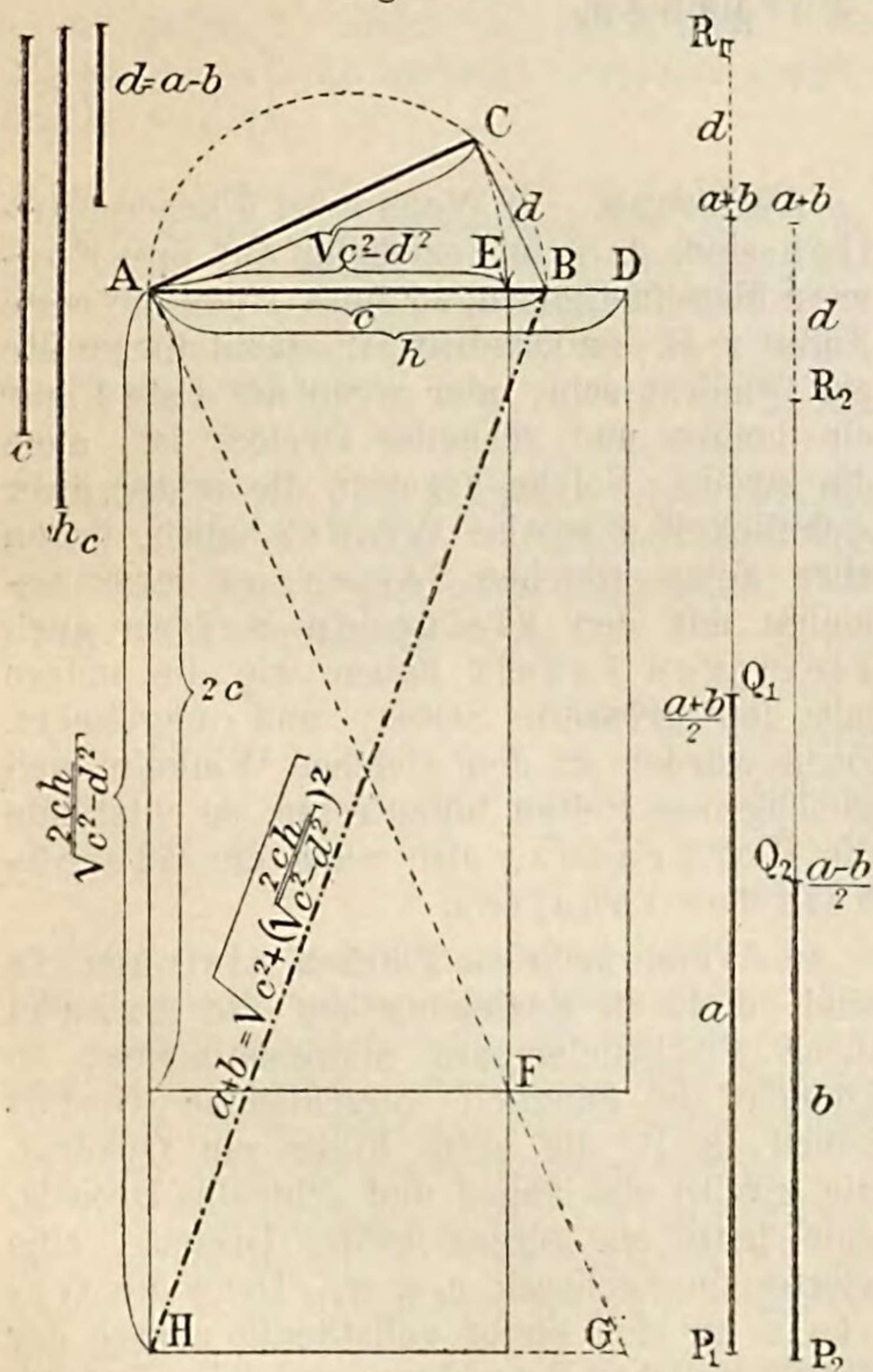
$$h_c = \frac{1}{2c} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)},$$

so kann man schreiben:

$$h_c = \frac{1}{2c} \sqrt{[(a+b)+c][(a+b)-c][c+(a-b)][c-(a-b)]}$$

$$h_c = \frac{1}{2c} \sqrt{[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]}.$$

Figur 64.



Erkl. 187. In Figur 64 sind alle Konstruktionen aneinander angeschlossen: 1) d als Sehne BC in den Halbkreis über $AB = c$, so dass die andere Sehne AC die andere Kathete wird. Auf derselben Strecke liegt zu 2) $AD = h$ als Rechtecksseite und zu 3) jene Kathete als Rechtecksseite $AE = AC$. Die Verwandlung des Rechtecks nach Antwort der Frage 25 und Erkl. 57 durch die Diagonale AF von A nach dem Schnittpunkt mit der Parallelen EF . Diese liefert den Punkt G und die Parallele GH . Dann ist 4) ABH das rechtwinklige Dreieck mit Hypotenuse $a+b$. Rechts daneben ist dann:

$$P_1 R_1 = a + b + d,$$

$$P_2 R_2 = a + b - d;$$

$$\text{also 5) } P_1 Q_1 = \frac{1}{2} P_1 R_1 = a,$$

$$P_2 Q_2 = \frac{1}{2} P_2 R_2 = b.$$

In dieser Gleichung kennt man alle Grössen ausser $a+b$; also wird:

$$\frac{2c \cdot h_c}{\sqrt{c^2 - (a-b)^2}} = \sqrt{(a+b)^2 - c^2}.$$

Und hieraus:

$$a+b = \sqrt{c^2 + \left(\frac{2ch}{\sqrt{c^2 - d^2}} \right)^2}.$$

Bezeichnet man nunmehr vorübergehend $a+b$ durch s , $a-b$ durch d , so wird nach Konstruktion obigen Ausdruckes:

$$a = \frac{1}{2}(s+d), \quad b = \frac{1}{2}(s-d).$$

Damit kennt man die drei Seiten a , b , c , also das ganze Dreieck.

Zur Ausführung des Ausdruckes:

$$a+b = \sqrt{c^2 + \left(\frac{2ch}{\sqrt{c^2 - d^2}} \right)^2}$$

konstruiert man:

1) $\sqrt{c^2 - d^2}$ als die zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenuse c und Kathete d ;

2) das Rechteck mit Seiten c und h und das Doppelte desselben;

3) man verwandelt dieses Rechteck in ein solches mit einer Seite gleich der im vorigen gefundenen Kathete;

4) die zweite Seite dieses Rechtecks als die eine und c als zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ergeben als Hypotenuse die Grösse $a+b$. Dann ist:

$$5) \quad a = \frac{a+b+d}{2}, \quad b = \frac{a+b-d}{2}.$$

Aufgaben-Sammlung.

I) Aufgaben über das Messen und die Masseinheiten.

(Zu Abschnitt 1.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 1. Es sollen Unterschiede angegeben werden, welche zwischen solchen Flächen bestehen können, die nicht kongruent, aber entweder ähnlich oder gleichgross sind?

Erkl. 188. Da alle Quadrate vier rechte Winkel und unter sich gleiche Seiten haben, so sind sämtliche möglichen Quadrate ähnlich; ebenso haben alle gleichseitigen Dreiecke gleiche Winkel und (infolge dessen) auch unter sich gleiche Seiten; alle regelmässigen Vielecke (wovon Quadrat und gleichseitiges Dreieck Einzelfälle sind) haben dieselben Winkel und gleiche Seiten: folglich sind alle regelmässigen n -Ecke unter einander ähnlich. Man kann sie mit irgend einem der gleichen Winkel aufeinander legen und findet, dass dann das eine, kleinere, vollständig in das andere grössere hineinfällt, dass also bei Vergrösserung von dessen Seiten bis zur Gleichheit auch vollständige Deckung herbeigeführt würde.

Ist von zwei gleichgrossen Dreiecken oder Rechtecken das erste lang, das andere kurz, so muss dafür das zweite breiter sein, als das erste, damit eben derselbe Flächeninhalt von ihnen eingeschlossen werden kann. Eine solche Verschiedenheit der Gestalt ist aber z. B. beim Kreise unmöglich. Daher sind Kreisflächen kongruent, wenn sie gleichgross sind: der Kreis kann angesehen werden als Grenzfigur der regelmässigen Vielecke mit unendlich vielen Ecken.

Erkl. 188a. Die Bedingungen der Flächen-gleichheit sind im vorliegenden Teile dieses Lehrbuches behandelt, diejenigen der Flächen-ähnlichkeit sind Gegenstand späterer Betrachtungen. Solche liefern dann auch den genauen Nachweis im einzelnen dass zur Aehnlichkeit die Winkelgleichheit nötig ist, dass Flächen-gleichheit entsteht, wenn zur Aehnlichkeit noch Gleichheit einer einzigen entsprechenden Seite hinzutritt u. s. w. (vergl. die nächsten Teile dieses Lehrbuches).

Auflösung. 1) Wenn zwei Flächen ähnlich sind, d. h. in Beziehung auf ihre Formen übereinstimmen, so muss, wenn die erste Figur z. B. ein Quadrat ist, auch die zweite ein Quadrat sein; oder wenn die erste Figur ein langes und schmales Dreieck ist, auch die zweite. Solche Figuren, die wegen ihrer Aehnlichkeit gleiche Winkel haben, haben aber keine gleichen Seiten: es muss diejenige mit den kleineren Seiten auch kleineren Inhalt haben wie die andere mit den grössern Seiten, und umgekehrt. Denn würden zu den gleichen Winkeln auch gleichgrosse Seiten hinzutreten, so entstünde die Kongruenz, also auch die Gleichheit des Inhaltes.

2) Wenn mehrere Flächen gleichgross sind, d. h. in Beziehung auf die Anzahl ihrer Flächenelemente übereinstimmen, so können sie gänzlich verschiedene Gestalt haben, z. B. die erste Figur ein Quadrat, die zweite ein langes und schmales Dreieck, eine dritte ein kurzes breites Dreieck, eine vierte ein Sechseck u. s. w. Denn die Gestalt an sich bleibt vollständig ausser der diesbezüglichen Betrachtung. Solche Figuren, welche gleichen Flächeninhalt haben, haben also deswegen weder gleiche Seiten noch gleiche Winkel; würde die Gleichheit der Seiten oder der Winkel zur Flächen-gleichheit hinzutreten, so entstünde die Kongruenz, also gleichzeitig die Aehnlichkeit der Figuren.

Aufgabe 2. Eine Fläche ist 3 qm 15 qdm 7 qcm gross; man soll die Grösse dieser Fläche in einheitlichem Mass angeben.

Auflösung. Nach der in Erkl. 20 gegebenen Tabelle ist:

$$\begin{aligned} 0,03 \text{ qDm} &= 3 \text{ qm} = 300 \text{ qdm} = 30000 \text{ qcm}, \\ 0,0015 \text{ qDm} &= 0,15 \text{ qm} = 15 \text{ qdm} = 1500 \text{ qcm}, \\ 0,000007 \text{ qDm} &= 0,0007 \text{ qm} = 0,07 \text{ qdm} = 7 \text{ qcm}, \end{aligned}$$

Erkl. 189. Man hat besonders darauf zu achten, dass beim Uebergang in eine höhere Flächenmasseinheit zwei Dezimalstellen abgestrichen werden müssen; also $11 \text{ qcm} = 0,11 \text{ qdm}$, aber $9 \text{ qcm} = 0,09 \text{ qdm}$; ist also eine einstellige Ziffer gegeben, so muss eine Null eingeschoben werden. Bei den Längenmassen fallen derartige Vorsichtsmassregeln vollständig fort.

Aufgabe 3. Eine Flächengrösse von $25,382 \text{ qm}$ soll in andern Einheiten ausgedrückt werden.

Erkl. 190. In Umkehrung der Erkl. 189 muss beim Uebergang in eine niedere Flächeneinheit eine Null angehängt werden, wenn die Anzahl der Dezimalstellen hinter dem Komma eine ungerade ist.

Aufgabe 4. Ein Bauplatz wird gebildet durch Ankauf dreier Geländestücke von $46,3 \text{ qm}$, $5325,7 \text{ qdm}$ und 4330 qcm . Wie gross wird derselbe?

Auflösung. Zerlegt man die Zahl $25,382$ folgendermassen:

$$25 \cdot 1 + 38 \cdot 0,01 + 20 \cdot 0,00001, \\ \text{so erhält man nach Erkl. 20:} \\ 25 \text{ qm } 38 \text{ qdm } 20 \text{ qcm.}$$

Auflösung.

$$46,3 \text{ qm} = 46 \text{ qm } 30 \text{ qdm} = 4630 \text{ qdm}, \\ 53,257 \text{ qm} = 53 \text{ qm } 25,7 \text{ qdm} = 5325,7 \text{ qdm}, \\ 0,433 \text{ qm} = 0 \text{ qm } 43,3 \text{ qdm} = 43,3 \text{ qdm} = 4330 \text{ qcm}.$$

Also wird die Gesamtfläche:

$$99,99 \text{ qm} = 99 \text{ qm } 99 \text{ qdm} = 9999 \text{ qdm} = 999900 \text{ qcm}.$$

Erkl. 191. Man kann nur gleichnamige Flächengrössen addieren oder subtrahieren. Daher müssen ungleichnamige Werte erst so umgewandelt werden, dass gleiche Benennungen vorliegen. Dann aber entstehen gleiche Werte, wie man auch die Benennung gewählt hat.

Jede über 100 betragende Ziffer einer Flächenmasseinheit liefert so viele Einheiten der nächst höheren Massgrösse, als sie Hunderter der nächst niederen angibt.

Aufgabe 5. Ein Grundstück von 1 qKm soll wegen Erbteilung in sieben gleichgrosse Stücke zerlegt werden. Welche Grösse bekommt ein Teil?

Erkl. 192. Man dividiert eine Flächengrösse wie eine ganze Zahl und setzt nach jeder Gruppe von zwei Dezimalstellen die nächst niedere Masseinheit als Benennung.

Auflösung. Um 1 qKm zu dividieren durch 7, kann man schreiben:

$$1 : 7 = 0,142857142857 \dots; \\ \text{also beträgt ein Teil:} \\ 14,2857 \text{ qHm oder } 14,2857 \text{ ha} = 1428,57 \text{ qDm} \\ \text{oder } 1428,57 \text{ a} = 142857 \text{ qm}.$$

Aufgabe 6. Was kosten $23,17 \text{ ha}$ eines Geländes, wenn 1 qm auf 5 ₰ kommen soll?

Erkl. 193. Man konnte auch umgekehrt rechnen: 5 ₰ für 1 qm sind 5 ₰ für 1 a , oder 500 ₰ für 1 ha , also $500 \cdot 23,17 = 11585 \text{ ₰}$ für $23,17 \text{ ha}$.

Auflösung. Da $1 \text{ ha} = 10000 \text{ qm}$ ist, und

$$5 \text{ ₰} = \frac{1}{20} \text{ ₰}, \text{ so kosten die } 23,17 \text{ ha:} \\ 23,17 \cdot 10000 \cdot \frac{1}{20} \text{ ₰} = \frac{2317}{2} \cdot 10 \text{ ₰} \\ = 1158,5 \cdot 10 \text{ ₰} = 11585 \text{ ₰}.$$

Aufgabe 7. Wie viele Bauplätze von 125 qm liefert ein Grundstück von 15 a?

Erkl. 193 a. Auch hier konnte umgekehrt gerechnet werden:

$$125 \text{ qm} = 1,25 \text{ a}; 15 \text{ a} : 1,25 \text{ a} = 12.$$

Auflösung. Da $15 \text{ a} = 1500 \text{ qm}$, und $1500 \text{ qm} : 125 \text{ qm} = 12$, so erhält man 12 Plätze der verlangten Grösse.

Aufgabe 8. Wie viele Quadratfuss hat 1 qm, wenn 10 Fuss = 3 m?

Erkl. 194. Im bürgerlichen Leben wird an manchen Orten noch nach dem früher gebräuchlichen Flächenmasse gerechnet, das auf der Länge von 1 Fuss = $\frac{3}{10}$ m sich aufbaute.

Auflösung. Wenn $3 \text{ m} = 10 \text{ Fuss}$, so ist $1 \text{ m} = \frac{10}{3} \text{ Fuss}$. Also hat das Quadrat von 1 m Länge $\frac{10}{3}$ Längsstreifen von je $\frac{10}{3}$ Quadratfuss oder im ganzen:

$$\frac{10}{3} \cdot \frac{10}{3} = \frac{100}{9} = 11 \frac{1}{9} \text{ Quadratfuss.}$$

Aufgabe 9. Wieviel qm hat ein Morgen, wenn die Quadratseite des Morgens 200 Fuss hat?

Erkl. 194 a. Andere Rechnungsweise ergibt für die Quadratseite des Morgens:

$$200 \text{ Fuss} = 20 \cdot 10 \text{ Fuss} = 20 \cdot 3 \text{ m};$$

demnach ist der Inhalt:

$$60 \cdot 60 \text{ qm} = 3600 \text{ qm} = 36 \text{ a.}$$

Auflösung. Wenn die Quadratseite 200 Fuss hat, so hat das ganze Quadrat:

$$200 \cdot 200 = 40000 \text{ Quadratfuss.}$$

Nun ist $10 \text{ Fuss} = 3 \text{ m}$, also $1 \text{ Fuss} = 0,3 \text{ m}$ und $1 \text{ Quadratfuss} = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09 \text{ qm}$. Also hat 1 Morgen $40000 \cdot 0,09 = 3600 \text{ qm}$ oder 36 a.

Aufgabe 10. Wieviel (englische) Quadratzoll bekommt ein Quadratfuss, wenn $1' = 12''$?

Erkl. 195. Der englische Zoll (inch) ist der 36te Teil und der englische Fuss (foot) der dritte Teil einer englischen Elle (yard); nach letzterer ist z. B. auf Fadenspulen aus England jeweils die Länge des aufgewickelten Fadens angegeben.

Auflösung. Wenn die Quadratseite in 12 Längeneinheiten geteilt wird, so zerfällt das ganze Quadrat in 12 Streifen von je 12 Quadrateinheiten in der Länge, also hat das ganze Quadrat $12 \cdot 12 = 144$ Flächeneinheiten der nächst niedern Ordnung.

Aufgabe 11. Wie viele Quadratmeilen hat das Königreich Württemberg, wenn dasselbe 19504 Quadratkilometer hat?

Erkl. 196. Eine Quadratmeile wäre zu zerlegen in $7 \frac{1}{2}$ Streifen von je 1 km Breite und $7 \frac{1}{2}$ Quadratkilometer Inhalt.

Auflösung. Da eine Quadratmeile (siehe Erkl. 18) 56,25 Quadratkilometer gross ist, so hat man die Anzahl der Quadratkilometer durch 56,25 zu dividieren, um Quadratmeilen zu erhalten, also $346,8$ rund 350 Quadratmeilen.

Aufgabe 12. Wie viele Quadratkilometer hat das deutsche Reich bei 9818 Quadratmeilen Grösse?

Erkl. 197. Rechnet man bei so grossen Werten genauer 1 geograph. Meile = 7420 m, so wird die Quadratmeile:

$$7,42 \cdot 7,42 = 55,0564 \text{ qkm,}$$

$$1 \text{ qkm} = 0,01816 \text{ Quadratmeile.}$$

Auflösung. Ist eine Quadratmeile 55,0564 qkm, so sind 9818 Quadratmeilen gleich $9818 \cdot 55,0564 = 540540 \text{ qkm}$.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 13. Man soll die Fläche von 17 qm 49 qdm 35 qcm in einheitlichem Masse angeben.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 2.

Aufgabe 14. Eine Flächengrösse von 42,43921 qDm in Einzelmassen auszudrücken?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 3.

Aufgabe 15. Eine Gemeinde besitzt 17 ha 53 a 70 qm Wald, 153460 qm Wiesengrund, 50,829 a Aecker. Wie gross ist ihr Gesamtgrundbesitz?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 4.

Aufgabe 16. Von einem Bauplatz von 2 a 23,5 qm werden 109,2 qm überbaut. Wieviel Fläche bleibt frei?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 4.

Aufgabe 17. Der wievielte Teil des Gesamtbesitzes in Aufgabe 15 entfällt auf jede einzelne der drei Abteilungen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 7.

Aufgabe 18. Wie gross muss ein Schulzimmer für 60 Kinder sein, wenn auf ein Kind 0,88 qm Bodenfläche kommen soll?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 6.

Aufgabe 19. Wie hoch kommt 1 qm eines Geländestücks, wenn dasselbe 0,75 a beträgt und 92,25 M. kostete?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 5.

Aufgabe 20. Man soll beweisen, dass ein Ar soviel Mark kostet, als ein Quadratmeter Pfennig; aber auch ein Ar soviel Pfennig, als ein Hektar Mark.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe stützt sich auf die Tabelle in Erkl. 20.

Aufgabe 21. Wieviel Grasertrag bringt eine Wiese von $82 \frac{1}{2}$ a, wenn auf 1 qm $\frac{1}{3}$ ♂ gerechnet werden darf?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 6.

Aufgabe 22. Wieviel Gartenbeete von je 3 qm Fläche lassen sich in einem Garten von $\frac{3}{4}$ a anlegen, wenn 15 qm auf die Wege kommt?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 7.

Aufgabe 23. Wie gross würde nach Aufgabe 12 die durchschnittliche Grösse je eines der 26 Staaten des deutschen Reiches, wenn alle gleich wären?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 5.

Aufgabe 24. Wieviel Quadratmeter hat ein Bauplatz von 17345 Quadratfuss?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 8.

Aufgabe 25. Wieviel Morgen hat ein Grundstück von 13,25 ha?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 9.

Aufgabe 26. Wieviel Quadratfuss gehen auf $\frac{9}{10}$ Morgen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 9.

Aufgabe 27. Wieviel Quadratmeter sind $\frac{7}{8}$ Morgen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 9.

Aufgabe 28. Wie viele Quadratmeilen hat Europa, wenn dasselbe rund 10 Millionen Quadratmeter enthält?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 11.

Erkl. 198. Die genaue Grösse ist 9940500 qkm.

Aufgabe 29. Wie viele Quadratkilometer beträgt das russische Reich mit 400000 Quadratmeilen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 12.

2 a) Aufgaben über das Rechteck und Parallelogramm.

(Zu Abschnitt 2 a.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 30. Man bestimme den Inhalt eines Rechtecks mit den Seiten $21\frac{1}{2}$ cm und 8 m.

Erkl. 199. Die Multiplikation $21\frac{1}{2} \cdot 0,8$ ergibt die Ziffer 17,2, aber weder in Quadratmeter, noch in Quadratcentimeter. Da aber eine Fläche in Quadrateinheiten angegeben werden muss, so darf die Multiplikation erst ausgeführt werden, wenn beide Längen auf dasselbe Längenmass gebracht sind. Dann erst gibt das Produkt als Flächenmass das Quadrat über dieser Längenmasseinheit.

Auflösung. Nach Satz 1 hat man die Seiten mit einander zu multiplizieren, um den Inhalt des Rechtecks zu erhalten. Verwandelt man beide Längenangaben in dm, so hat man:

$2,15 \text{ dm} \cdot 8 \text{ dm} = 17,2 \text{ qdm} = 0,172 \text{ qm} = 1720 \text{ qcm}.$
Dasselbe Ergebnis entsteht, wenn man die beiden Längen in m verwandelt:

$$0,215 \text{ m} \cdot 0,8 \text{ m} = 0,172 \text{ qm}$$

oder beide in cm:

$$21,5 \text{ cm} \cdot 80 \text{ cm} = 1720 \text{ qcm}.$$

Aufgabe 31. Wie gross ist der Inhalt eines Rechtecks mit Seite 2,4 m und Höhe 18,5 dm?

Auflösung. Nach Satz 1 und Erkl. 199 wird der Inhalt:

$$24 \text{ dm} \cdot 18,5 \text{ dm} = 444 \text{ qdm} = 4,44 \text{ qm}.$$

Aufgabe 32. Wie hoch kommt ein Bauplatz von 62,2 m Länge und 27,5 m Breite, wenn 1 qm 8,80 M kostet?

Auflösung. Die Fläche ist $62,2 \cdot 27,5$ qm, also der Preis:

$$62,2 \cdot 27,5 \cdot 8,8 \text{ M} = 15052,40 \text{ M}$$

Aufgabe 33. Wie viele rechteckige Zementplättchen von $10 \frac{1}{2}$ cm Breite und 18 cm Länge braucht man zur Belegung einer Bodenfläche von 6,3 m Breite und 8,4 m Länge?

Erkl. 200. Im vorliegenden Falle kann die Belegung und auch die Ausrechnung in zweifacher Weise geschehen, da man sowohl Länge als Breite der grossen Fläche durch Länge und Breite der kleinen dividieren kann. Legt man nämlich die Plättchen längs den 8,4 m, so braucht's in der Länge $\frac{8,4 \text{ m}}{18 \text{ cm}} = 46 \frac{2}{3}$, in der Breite $\frac{10,5 \text{ cm}}{6,3 \text{ m}} = 60$, also in der Fläche $46 \frac{2}{3} \cdot 60 = 2800$. Legt man die Plättchen längs den 6,3 m, so braucht's in der Länge $\frac{6,3 \text{ m}}{18 \text{ cm}} = 35$, in der Breite $\frac{8,4}{10,5} = 80$, also in der Fläche wieder $35 \cdot 80 = 2800$.

Auflösung. Die Fläche eines Plättchens ist $10,5 \text{ cm} \cdot 18 \text{ cm} = 189 \text{ qcm}$, die Fläche des Bodens $6,3 \text{ m} \cdot 8,4 \text{ m} = 52,92 \text{ qm}$. Um zu finden, wie oft erstere Fläche in letzterer enthalten ist, verwandelt man letztere ebenfalls in qcm und dividiert:

$$529200 \text{ qcm} : 189 \text{ qcm} = 2800.$$

Also braucht man 2800 Plättchen. Und zwar sind dieselben nach Erkl. 200 am besten der Breite nach aufzulegen.

Aufgabe 34. Man suche die Länge eines Rechtecks von 5,60 qm Fläche und 14 dm Breite.

Auflösung. Ist die gesuchte Länge gleich x , so ist $5,60 = 1,4 \cdot x$, also $x = \frac{5,6}{1,4} = 4 \text{ m}$.

Erkl. 201. Allgemein kann man sagen, dass beim Rechteck:

$$\text{Länge} = \frac{\text{Fläche}}{\text{Breite}}, \text{ Breite} = \frac{\text{Fläche}}{\text{Länge}}.$$

Aufgabe 35. Man bestimme die Seiten eines Rechtecks, dessen Umfang und Fläche gegeben sind: $u = 22 \text{ m}$, $F = 30 \text{ qm}$.

Erkl. 202. Ein Lehrsatz über die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ besagt, dass p die negative Summe, q das Produkt der Lösungen sei. (Vergl. Blind, Lehrbuch der Gleichungen 2. Grades.)

Erkl. 203. Allgemein erhält man als Lösung der nebenstehenden Aufgabe die Gleichung:

$$x^2 - \frac{u}{2} \cdot x + F = 0, \quad x_1 = a = \frac{u}{4} + \sqrt{\frac{u^2}{16} - F},$$

$$x_2 = b = \frac{u}{4} - \sqrt{\frac{u^2}{16} - F},$$

oder:

$$a = \frac{1}{4} (u + \sqrt{u^2 - 16 F}),$$

$$b = \frac{1}{4} (u - \sqrt{u^2 - 16 F}).$$

Auflösung. Sind die Seiten a und b , so ist die Fläche $a + b = 30$, der Umfang ist: $a + b + a + b = 2a + 2b = 2(a + b) = 22$, also $a + b = 11$. Daher sind a und b die beiden Lösungen einer quadratischen Gleichung von der Form:

$$x^2 - 11x + 30 = 0,$$

$$x = +5,5 \pm \sqrt{5,5^2 - 30} = +5,5 \pm \sqrt{0,25} = 5,5 \pm 0,5.$$

Also:

$$x_1 = a = 5,5 + 0,5 = 6 \text{ m},$$

$$x_2 = b = 5,5 - 0,5 = 5 \text{ m}.$$

In der That ist dann der Inhalt gleich $5 \cdot 6 = 30$, der Umfang gleich $2(5 + 6) = 22$.

Aufgabe 36. Man bestimme die Fläche eines Quadrats von 0,03 m Seite.

Auflösung.

$$0,03 \text{ m} \cdot 0,03 \text{ m} = 0,0009 \text{ qm} = 0,09 \text{ qdm} = 9 \text{ qcm}.$$

Aufgabe 37. Wie gross ist die Fläche eines Quadrats von 20,48 dm Umfang?

Auflösung. Ist der Umfang 20,48 dm,

Erkl. 204. Ist allgemein der Umfang u , so ist die Seite $\frac{u}{4}$, und der Flächeninhalt $\frac{u}{4} \cdot \frac{u}{4} = \frac{u^2}{16}$.

so ist die Seite $\frac{20,48}{4} = 5,12$, also der Inhalt: $5,12 \cdot 5,12 = 26,2144 \text{ qdm} = 2621,44 \text{ qcm}.$

Aufgabe 38. Wie gross ist die Seite eines Quadrats von 7921 qm Fläche?

Auflösung. Ist die Seite gleich a , so muss $a^2 = 7921$ sein, also:

Erkl. 205. Die Ausrechnung der Quadratwurzel kann folgendermassen geschehen:

$$a = \sqrt{7921} = 89 \text{ m}.$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{79'21} = 89 \\ 152 : 16 \\ \underline{81} \\ 0 \end{array}$$

Aufgabe 39. Wie teuer kommt 1 qm, wenn ein quadratischer Platz von 25 m Länge auf 3437,5 $\mathcal{M}$ kommt?

Auflösung. Ist die Seite gleich 25 m so ist die Fläche 625 qm. Und kosten 625 qm 3437,5 $\mathcal{M}$, so kostet 1 qm:

$$3437,5 : 625 = 5,5 \mathcal{M}$$

Aufgabe 40. An Stelle eines Quadrats von der Seite $a = 14,2 \text{ m}$ soll ein gleich-grosses Rechteck von 32 m Länge gesetzt werden. Wie breit wird dieses?

Auflösung. Ist die gesuchte Breite b , so muss $14,2 \cdot 14,2 = 32 \cdot b$ sein, also:

$$b = \frac{14,2 \cdot 14,2}{32} = \frac{201,64}{32} = 6,3 \text{ m}.$$

Aufgabe 41. Wie verhalten sich die Inhalte mehrerer Quadrate von den Seiten $s_1, s_2, \dots$, bzw. mehrerer Rechtecke von den Seiten $a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3$?

Auflösung. Die Inhalte verhalten sich wie $s_1^2 : s_2^2 : s_3^2 \dots$, bzw. wie: $a_1 \cdot b_1 : a_2 \cdot b_2 : a_3 \cdot b_3 : \dots$

Aufgabe 42. Wie verhalten sich die Inhalte mehrerer Rechtecke, welche sämtlich eine gleich-grosse Seite a haben?

Erkl. 206. Während allgemein zwei Flächen sich verhalten müssen wie zwei andere Flächen, so erhält man hier wegen der Gleichheit einer Seite die Proportion:

$$\text{Fläche} : \text{Fläche} = \text{Strecke} : \text{Strecke}.$$

Auflösung. Sind die ungleichen Seiten b_1, b_2, b_3 , so verhalten sich die Inhalte wie $a \cdot b_1 : a \cdot b_2 : a \cdot b_3 \dots$, also wie $b_1 : b_2 : b_3 \dots$

Aufgabe 43. Es sollen zwei Rechtecke addiert werden, welche eine gleiche Seite haben.

Auflösung. Man verlängert die ungleiche Seite des einen um diejenige des andern Rechtecks und vervollständigt das ganze Rechteck.

Erkl. 207. Ist das erste $a \cdot b_1$, das zweite $a \cdot b_2$, so ist das neue Rechteck:

$$a(b_1 + b_2) = a \cdot b_1 + a \cdot b_2.$$

Aufgabe 44. Man berechne den Inhalt eines Parallelogramms mit Seite $4\frac{1}{2}$ m, Höhe $92\frac{1}{5}$ cm.

Auflösung. Die Fläche ist nach Satz 3:
 $4\frac{1}{2} \text{ m} \cdot 92\frac{1}{5} \text{ cm} = 45 \text{ dm} \cdot 9,22 \text{ dm}$
 $= 414,9 \text{ qdm} = 4\frac{3}{20} \text{ qm}.$

Aufgabe 45. Welchen Umfang hat ein Rhombus von 369 qcm Inhalt und 14,4 cm Höhe?

Auflösung. Ist die Seite a , so muss $a \cdot 14,4 = 36$ sein, also:

Erkl. 208. Allgemein würde:

$$a \cdot h = F, \quad a = \frac{F}{h}, \quad u = \frac{4 \cdot F}{h}.$$

$$a = \frac{36}{14,4} = 7\frac{1}{2}.$$

Dann ist der Umfang:

$$u = 4a = 30.$$

Aufgabe 46. Von einem Rhombus kennt man den Inhalt 72 qcm und weiss, dass die Höhe halb so gross ist als die Seite. Wie gross ist der Umfang?

Auflösung. Ist die Seite a , der Umfang also $4a$, so ist die Höhe $\frac{a}{2}$ und die Fläche

Erkl. 209. Ist allgemein $a = n \cdot h$, so wird:

$$F = \frac{a \cdot a}{n} \quad \text{und} \quad a = \sqrt{n \cdot F}.$$

$$\frac{a \cdot a}{2} = 72; \quad \text{also:}$$

$$a^2 = 144, \quad a = 12, \quad u = 48.$$

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 47. Man soll den Inhalt der Rechtecke bestimmen, deren Seiten sind:

- a) 30 km und 1243 m;
 - b) 7.3 m und 52,9 cm;
 - c) 98,5 mm und 0,24 dm.
-

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 30.

Aufgabe 48. Man bestimme den Inhalt der Rechtecke zwischen zwei Parallelen von 3,02 m Abstand und Seiten:

- a) 2,98 m, b) 32,5 cm, c) 17 dm.
-

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 31.

Aufgabe 49. Wieviel Zentner Heu gibt eine Wiese von 243,5 m Länge und 78,2 m Breite, wenn je 1 Ar 32 kg Heu gibt?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 32.

Aufgabe 50. Wieviel gewöhnliche Backsteine (12 cm breit, 25 lang) braucht man zur Belegung von drei Küchenböden von je 3,60 m Länge und 2,65 m Breite?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 33.

Aufgabe 51. Wie hoch ist ein Rechteck von 3,5 qm Inhalt und 21 dm Seite?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 34.

Aufgabe 52. Welche Seiten hat ein Rechteck von 18 m Umfang und 18 qm Fläche?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 35.

Aufgabe 53. Welches ist die Fläche eines Quadrats mit Seite:

- a) 287 km, b) 53,2 m, c) 573 mm?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 36 und 37.

Aufgabe 54. Welches ist der Umfang eines Quadrats von Fläche:

- a) 49 ha, b) 529 a, c) 75,69 qm,
d) 204,5 qcm, e) 906 qmm?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 38.

Aufgabe 55. Wie teuer kommt der Verputz auf 1 qm, wenn vier Zimmerdecken von je 4,1 m Breite und 5,4 m Länge den Betrag von 26,60 M. kosteten?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 39.

Aufgabe 56. Wie gross ist die Seite des Quadrats, welches gleich ist einem Rechteck von 3,2 m Breite und doppelt so grosser Länge?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 40 und 38.

Aufgabe 57. Man beweise, dass inhaltsgleiche Rechtecke, wenn sie eine gleich-grosse Seite haben, auch die zweite gleich-gross haben müssen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 41 und 42.

Aufgabe 58. Ebenso, wenn sich die Diagonalen unter demselben Winkel schneiden.

Andeutung. Man beachte die Hälften der Rechtecke.

Aufgabe 59. Man subtrahiere zwei Rechtecke, welche eine gleiche Seite haben.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 43.

Aufgabe 60. Man berechne den Inhalt von Parallelogrammen bzw. Rhomben mit Seiten und Höhen:

- a) 0,342 m und 1,07 m,
b) 7,86 dm und 54,3 cm,
c) 2 m und 51 mm.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 44.

Aufgabe 61. Welche Höhe hat ein Rhombus von 23 qdm Inhalt und 16 dm Umfang?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 45.

Aufgabe 62. Man beweise folgende Sätze:

a) Parallelogramme von gleicher Fläche und Seite haben gleiche zugehörige Höhe;

b) Parallelogramme von gleicher Fläche und Höhe haben gleiche zugehörige Seite;

c) Parallelogramme von gleicher Höhe verhalten sich wie die zugehörigen Seiten;

d) Parallelogramme von gleicher Seite verhalten sich wie die zugehörigen Höhen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 41 und 42.

Aufgabe 63. Man zeichne mehrere Parallelogramme, messe nach Figur 5 deren Seiten und Höhen und vergleiche die Ergebnisse in nebenstehender Weise.

	a_1	h_1	$a_1 \cdot h_1$	a_2	h_2	$a_2 \cdot h_2$	Mittelwert	Fehlergrenze in Prozent
1) . . .	5,2	6,8	35,36	9,1	3,9	35,49	35,4(25)	$\frac{1}{3} \%$
2) . . .	17,3	25	432,5	24	18,5	444	438(,25)	$2 \frac{1}{2} \%$

Erkl. 210. Zur Fehlerbestimmung dividiert man mit dem Mittelwerte in die 100fache Differenz $a_1 h_1 - a_2 h_2$.

Aufgabe 64. Man wähle verschiedene Quadrate und Rechtecke, z. B. das Buch, Tisch, Thüre, Fenster, neu gezeichnete Rechtecke u. s. w., schätze ihren Inhalt nach Augenmass, messe sodann ihre Seiten und berechne daraus den Inhalt und vergleiche beiderlei Ergebnisse nach nebenstehender Tabelle.

	Schätzung	Messung			Fehler	
		a_1	a_2	$a_1 \cdot a_2$	absolut	in Prozent
1) . . .	4 qdm	1,7 dm	2,4 dm	4,08 qdm	— 0,08	— 2%
2) . . .	$1 \frac{1}{4}$ qm	1,1 m	= 1,1 m	1,21 qm	+ 0,04	+ $3 \frac{1}{3} \%$

2b) Aufgaben über das Dreieck und die übrigen Vielecke.

(Zu Abschnitt 2 b.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 65. Man bestimme den Inhalt verschiedener gezeichnet vorliegender Dreiecke, indem man für jede Seite und Höhe die Masszahl sucht und einen Mittelwert

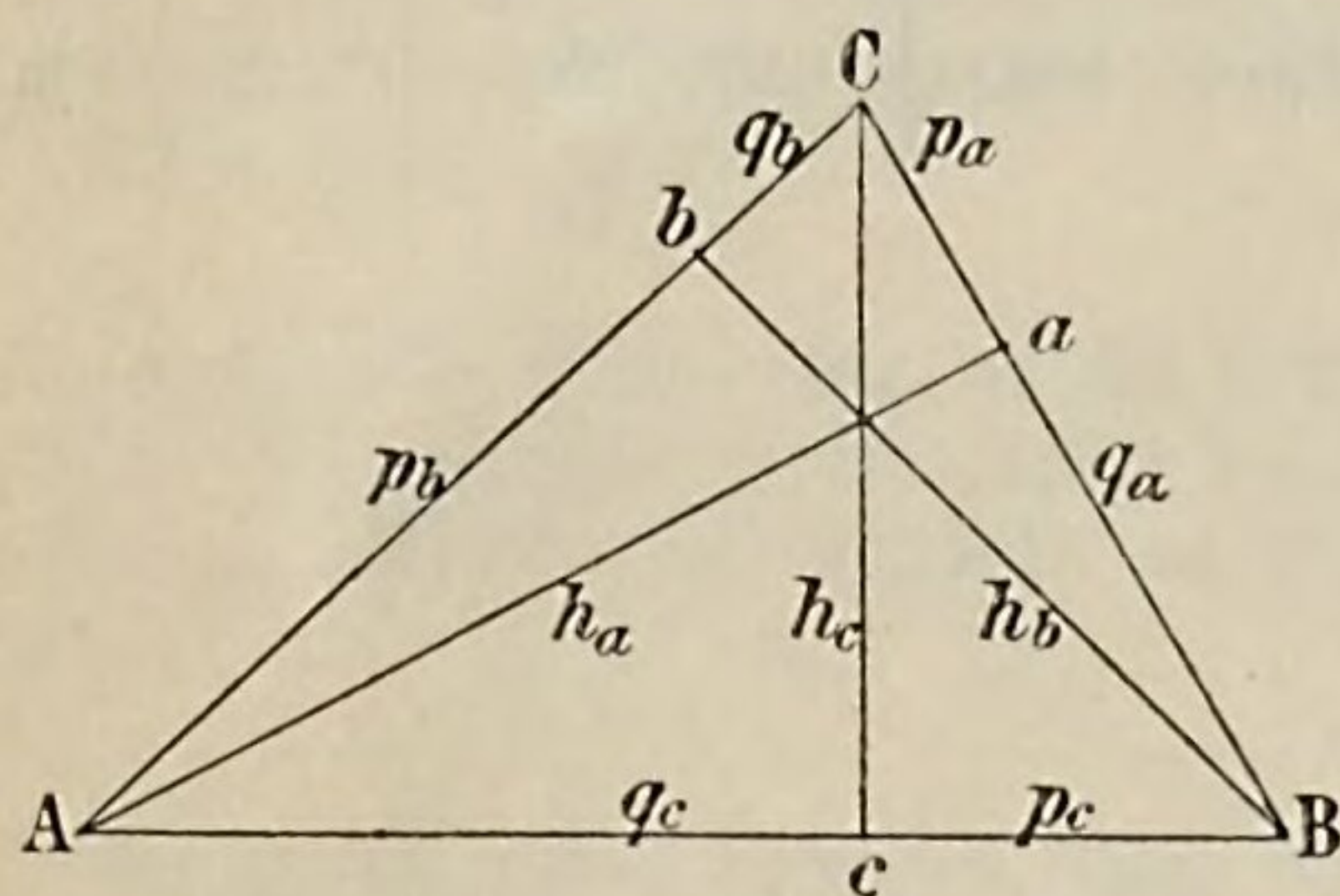
festsetzt zwischen den drei Werten des Inhalts.

Auflösung. Die Ausführung dieser Aufgabe kann wie bei den vorigen in Form einer Tabelle geschehen, wie folgt zu Figur 65 I und II in cm:

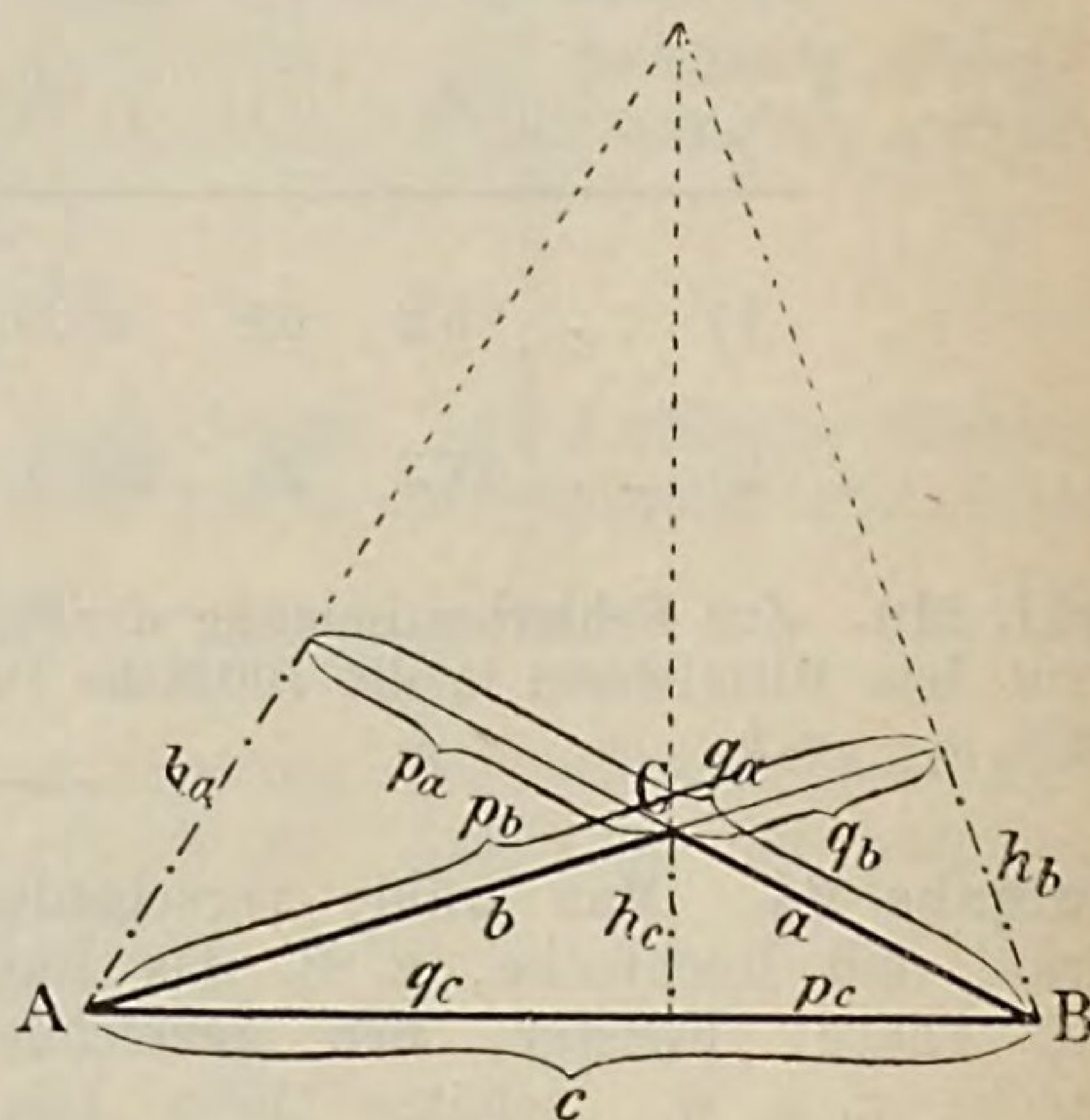
	a	h_a	$\frac{a \cdot h_a}{2}$	b	h_b	$\frac{b \cdot h_b}{2}$	c	h_c	$\frac{c \cdot h_c}{2}$	Mittel	Fehlergrenze
1) . . .	3,24	3,9	6,318	4,01	3,14	6,296	4,51	2,78	6,269	6,29(4)	$\frac{4}{5} \%$
2) . . .	2	2,12	2,12	3	1,45	2,175	4,68	0,92	2,153	2,14(9)	$2 \frac{1}{2} \%$

Erkl. 211. Das Mittel dreier Zahlen ist der dritte Teil ihrer Summe; die Fehlergrenze kann annähernd gefunden werden, indem man die Differenz der äussersten Werte ver Hundertfacht und durch den Mittelwert dividiert.

Figur 65 I.



Figur 65 II.



Aufgabe 66. Von einem Dreieck kennt man den Inhalt und die Höhe; welches ist die Grundseite?

$$F = 20 \text{ qcm}, \quad h = 12 \text{ cm}.$$

Erkl. 212. Allgemein wird:

$$g = \frac{2F}{h}, \quad h = \frac{2F}{g}.$$

also:

Auflösung. Da $F = \frac{g \cdot h}{2}$, so wird hier:

$$F = \frac{12 \cdot g}{2} = 6g,$$

$$g = \frac{20}{6} = 3 \frac{1}{3} \text{ cm}.$$

Aufgabe 67. Von einem Dreieck kennt man die zwei Seiten a , b und die Höhe zur einen. Wie gross ist die Höhe zur andern?

Auflösung. Es ist:

$$F = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2},$$

also findet man h_b aus der letzten Gleichung:

$$h_b = \frac{a \cdot h_a}{b}.$$

Aufgabe 68. Man soll den Satz 5 unmittelbar aus dem Satz 1 ableiten, ohne auf das Parallelogramm zurückzugehen.

Auflösung. Da die Rechtecksfläche gleich dem Produkt zweier Seiten ist und durch

Erkl. 213. Ausgeführt an den Figuren 65 I und II erhält man folgende Entwicklung in je dreifacher Auswahl:

In Figur 65 I:

$$\begin{aligned} ABC &= \triangle a h_c p_c + \triangle b h_c q_c \\ &= \frac{h_c \cdot p_c}{2} + \frac{h_c \cdot q_c}{2} \\ &= \frac{h_c}{2} (p_c + q_c) = \frac{h_c \cdot c}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Oder: } ABC &= \triangle c h_a q_a + \triangle b h_a p_a \\ &= \frac{h_a \cdot q_a}{2} + \frac{h_a \cdot p_a}{2} \\ &= \frac{h_a}{2} (q_a + p_a) = \frac{h_a \cdot a}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Oder: } ABC &= \triangle c h_b p_b + \triangle a h_b q_b \\ &= \frac{h_b \cdot p_b}{2} + \frac{h_b \cdot q_b}{2} \\ &= \frac{h_b}{2} (p_b + q_b) = \frac{h_b \cdot b}{2}. \end{aligned}$$

In Figur 65 II:

$$\begin{aligned} ABC &= \triangle a h_c p_c + \triangle b h_c q_c \\ &= \frac{h_c \cdot p_c}{2} + \frac{h_c \cdot q_c}{2} \\ &= \frac{h_c}{2} (p_c + q_c) = \frac{h_c \cdot c}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Oder: } ABC &= \triangle c h_a q_a - \triangle b h_a p_a \\ &= \frac{h_a \cdot q_a}{2} - \frac{h_a \cdot p_a}{2} \\ &= \frac{h_a}{2} (q_a - p_a) = \frac{h_a \cdot a}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Oder: } ABC &= \triangle c h_b p_b - \triangle a h_b q_b \\ &= \frac{h_b \cdot p_b}{2} - \frac{h_b \cdot q_b}{2} \\ &= \frac{h_b}{2} (p_b - q_b) = \frac{h_b \cdot b}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 69. Wie gross ist die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem auf sonstigem Wege gefunden sind die drei Seiten 6, 8, 10?

Auflösung. Da $\frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$, so muss die Höhe $= \frac{a \cdot b}{c} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$ sein.

Aufgabe 70. Zwischen zwei gegebenen Parallelen im Abstand $b = 5$ soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Fläche 24 eingezeichnet werden; wie gross muss seine Grundseite gewählt werden, damit die andere Kathete zu den Parallelen senkrecht stehe?

Auflösung. Es muss $\frac{a \cdot b}{2} = F$, also $\frac{a \cdot 5}{2} = 24$, folglich $a = \frac{48}{5} = 9,6$ sein.

Aufgabe 71. Ein Dreieck von gegebenem Flächeninhalt F soll so konstruiert werden, dass seine drei Eckpunkte auf einem gegebenen Kreise liegen.

Auflösung. Man trägt in den Kreis eine beliebige Sehne als Grundseite a ein,

die Diagonale halbiert wird, so ist zunächst die Fläche des durch Halbierung entstehenden rechtwinkligen Dreiecks gleich der Hälfte des Produktes der Katheten. Jedes beliebige Dreieck aber wird durch jede der Höhen als Summe oder Differenz zweier rechtwinkligen Dreiecke dargestellt, welche diese Höhe als eine Kathete haben und deren Seitenabschnitte als die andere. Durch Zusammenfassung dieser beiden folgt dann wieder für die Fläche des ganzen Dreiecks die Hälfte des Produktes von Grundseite und Höhe.

Der Beweis kann ohne Anwendung der Subtraktion durchgeführt werden, da auch beim stumpfwinkligen Dreieck immer eine Seite, nämlich die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende, von der Höhe innen getroffen wird.

Erkl. 214. Wie aus der Lösung dieser Aufgabe hervorgeht, kann dieselbe auf sehr vielfache Art gemacht werden; also dürften auch zur gestellten Aufgabe noch vielfach Einschränkungen hinzutreten.

dividiert $2F$ durch die Länge von a und erhält so die Höhe des Dreiecks; zieht man dann zu a im Abstand h die Parallele, so erhält man die beiden Schnittpunkte mit dem Kreise als zweifache Lösung für die dritte Ecke.

Aufgabe 72. Man soll beweisen, dass die Fläche eines Trapezes gleich ist der Fläche jedes andern Trapezes zwischen denselben Parallelen, dessen Schenkelseiten durch die Mittelpunkte der nicht parallelen Seiten des ersten Trapezes gehen.

Auflösung. Jedes solche Trapez hat identisch dieselbe Mittellinie und Höhe, also auch denselben Inhalt $m \cdot h$.

Erkl. 215. Unter diesen inhaltsgleichen Figuren befinden sich auch Parallelogramme und ein Rechteck.

Aufgabe 73. Von einem beliebigen Punkte auf der einen Parallelseite eines Trapezes (oder deren Verlängerung) werden Linien gezogen durch die Mittelpunkte der nicht parallelen Seiten. Wie gross ist der Inhalt des entstehenden Dreiecks?

Auflösung. Das Dreieck ist stets gleichgross dem Trapez, da seine Grundseite $2 \cdot m$ werden muss, also sein Inhalt:

$$\frac{2m \cdot h}{2} = m \cdot h.$$

Aufgabe 74. Wie gross ist der Inhalt eines Trapezes, dessen Parallelseiten sind 5,3 und 2,8 m und dessen Höhe gleich 4 m?

Auflösung.

$$F = \frac{a + c}{2} \cdot h = \frac{1}{2} (5,3 + 2,8) \cdot 4 = 2 \cdot 8,1 = 16,2 \text{ qm.}$$

Aufgabe 75. Was kostet die Schieferbedeckung eines Daches von Trapezform, wenn die Firstlänge 7,2 m, die untere Kante 12,8 m, die Höhe 7,6 m, und wenn 1 qm Schieferdeckung auf 4,50 $\mathcal{M}$ zu stehen kommt?

Auflösung. Die Fläche ist:

$$\frac{1}{2} \cdot (7,2 + 12,8) \cdot 7,6 = 76 \text{ qm,}$$

kostet also $76 \cdot 4,5 = 342 \mathcal{M}$

Aufgabe 76. Welche Tiefe hat ein Bauplatz von $7 \frac{1}{2}$ Ar Fläche, dessen Vordergrenze 24 m hat, während die Rückenlinie nur $20 \frac{1}{2}$ m misst?

Auflösung. Es ist:

$$F = \frac{1}{2} (a + b) \cdot h,$$

also:

$$750 \text{ qm} = \frac{1}{2} \left(24 + 20 \frac{1}{2} \right) \cdot h,$$

folglich:

$$h = \frac{2F}{a + b}$$

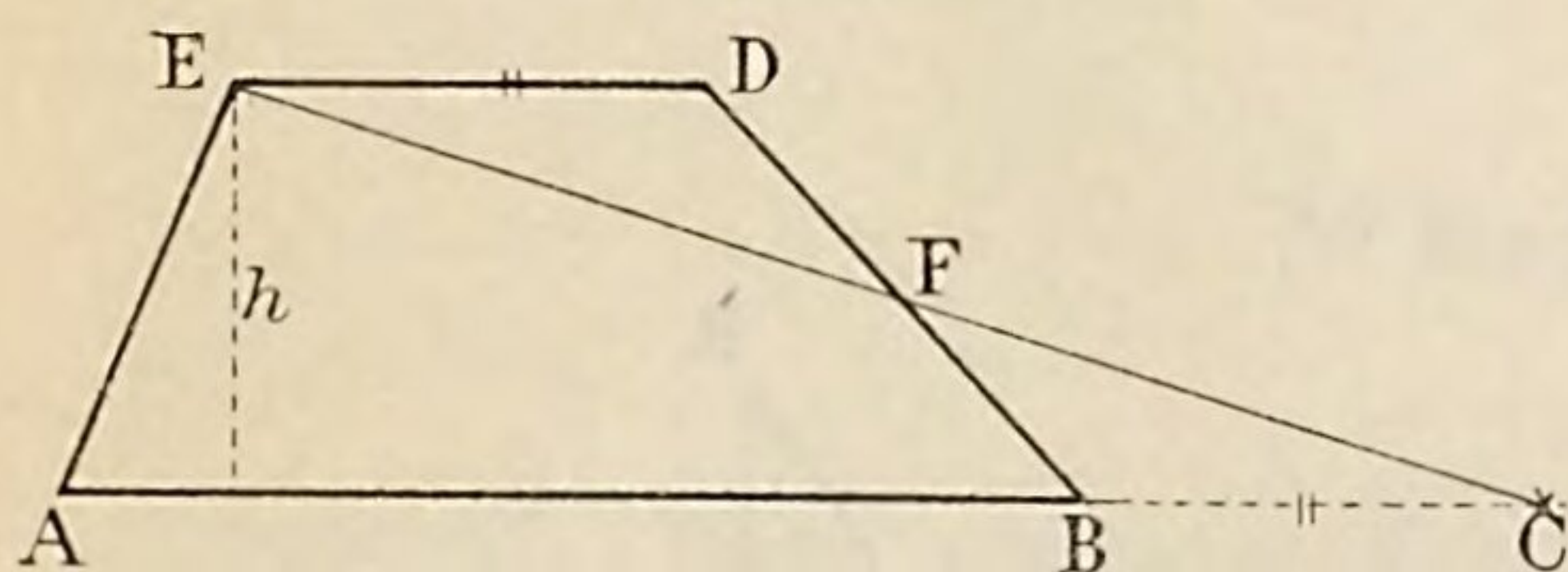
oder:

$$h = 1500 : 44,5 = 33,7 \text{ m.}$$

Aufgabe 77. Man beweise durch Konstruktion, dass ein Trapez gleichgross ist mit einem Dreieck gleicher Höhe, welches als Grundseite die Summe der Paralleelseiten hat.

Erkl. 216. Dass $\triangle EDF \cong CBF$ ist, kann bewiesen werden durch zentrische Symmetrie bzw. halbe Umdrehung um Punkt F , oder auch nach dem vierten Kongruenzsatze, indem $ED = BC$ und alle Winkel gleichgross als Scheitelwinkel bzw. Wechselwinkel.

Figur 66.



Auflösung. Macht man in Figur 66 $BC = ED = c$, so ist $AC = a + c$. Da nun $ED \parallel BC$ ist, so müssen BD und CE einander im Mittelpunkt treffen, also:

$$\triangle BCF \cong DEF,$$

also:

$$ABFE + EDF = ABFE + BCF,$$

oder Trapez $ABDE = \text{Dreieck } AEC$.

Rechnend beweist man unmittelbar:

$$ABED = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h.$$

und

$$AEC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h,$$

also ebensogross.

Aufgabe 78. Man berechne die Fläche eines Deltoids, dessen Diagonalen sind 5,3 und 2,8 m.

Auflösung. Nach Antwort der Frage 19 ist der Inhalt gleich $\frac{1}{2} \cdot 5,3 \cdot 2,8 = 7,42$ qm.

Aufgabe 79. Wie gross ist das Diagonalenprodukt eines Rhombus von 4 m Seite und 2,5 m Höhe?

Auflösung. Sind die Diagonalen e und f , so ist die Fläche $\frac{e \cdot f}{2}$ oder auch:

$$\frac{g \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2,5 = 5,$$

also Diagonalenprodukt = 10.

Aufgabe 80. Man bestimme den Wert der Diagonale des Quadrats von 10 m Seitenlänge.

Erkl. 217. Allgemein findet man hier schon, wie erst später durch den pythagoreischen Lehrsatz:

$$\frac{e^2}{2} = a^2, e = a\sqrt{2}.$$

Auflösung. Ist die Diagonale gleich e , so ist nach Antwort der Frage 19 die Fläche $\frac{e^2}{2}$. Dieselbe ist aber auch gleich 100, also:

$$\frac{e^2}{2} = 100, e = \sqrt{200} = 10 \cdot \sqrt{2} = 14,14 \dots \text{m}.$$

Aufgabe 81. Man bestimme den Inhalt der vier in Figur 67 vorliegenden Tangentenvierecke.

Erkl. 218. Es bedarf keiner näheren Erörterung, dass in der That in den vier Fällen die Fläche $ABCD$ sich jeweils darstellt:

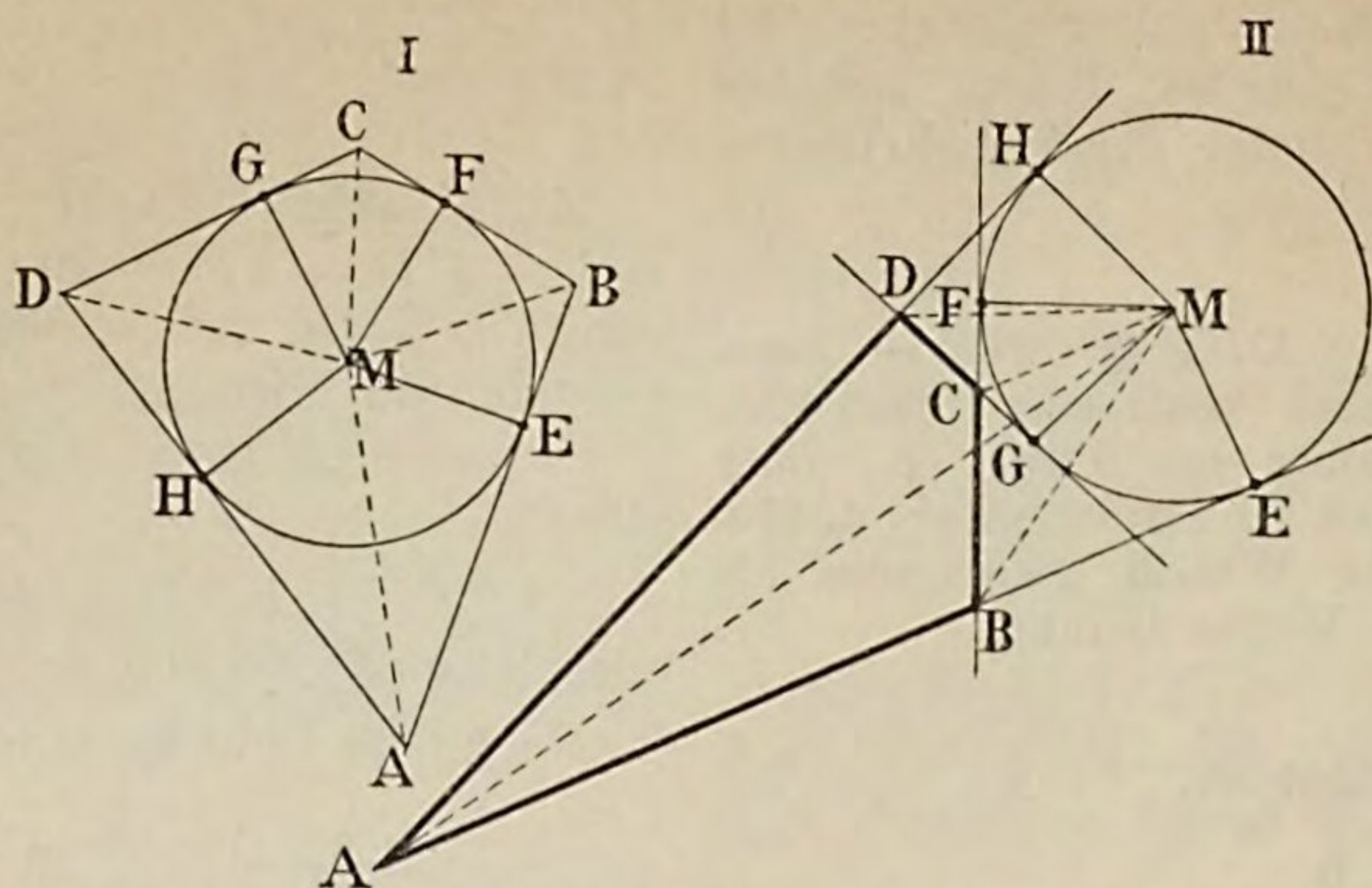
$$F_1 \text{ und } F_3 = ABM + BCM + CDM + DAM,$$

Sachs, Ebene Elementar-Geometrie. V.

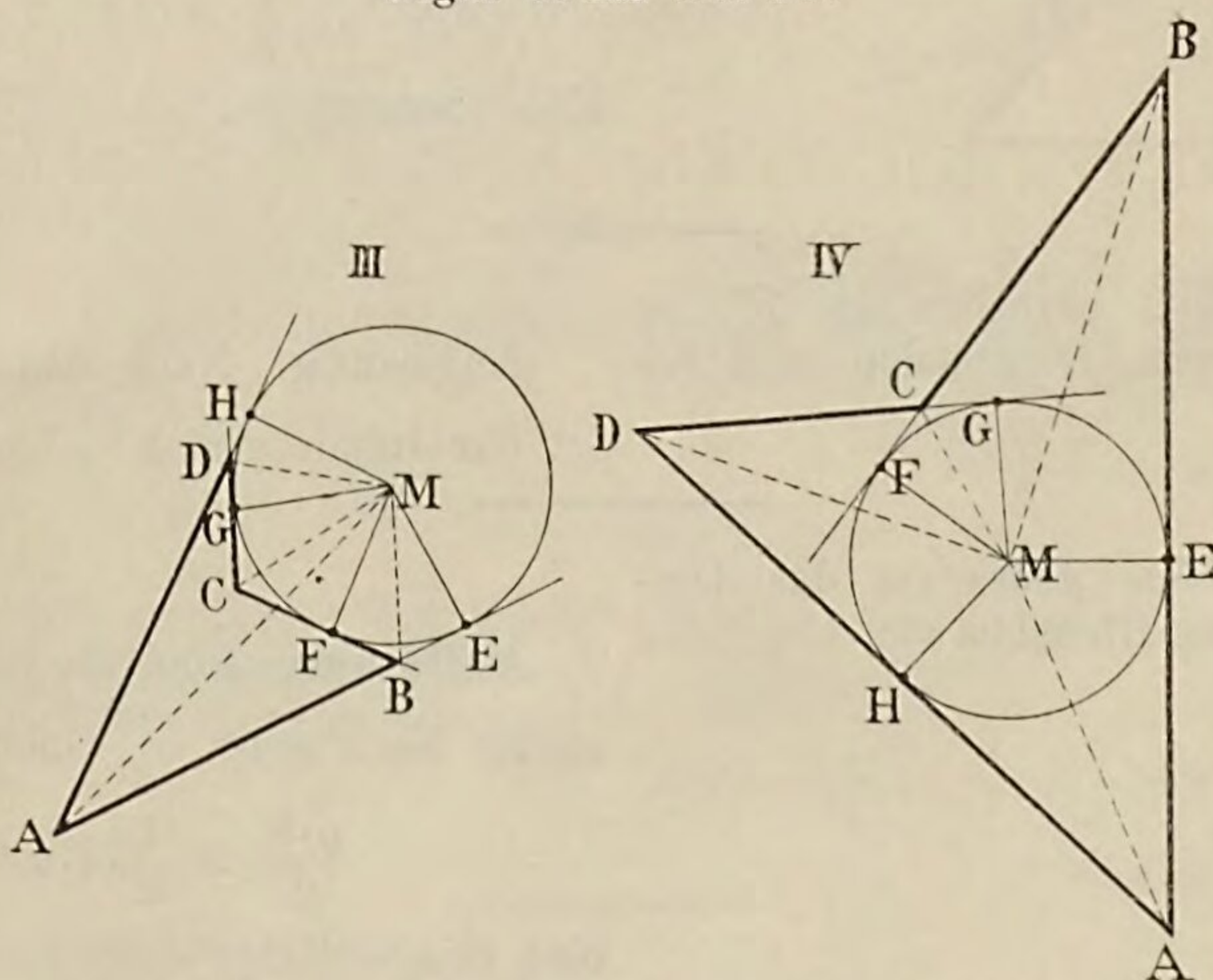
Auflösung. Nach Satz 8 und Antwort der Frage 20 ist dieser Inhalt zu setzen gleich $\frac{\rho}{2}(a \pm b \pm c \pm d)$, je nachdem der Kreis im Innenwinkel β , γ oder δ liegt oder nicht. Man hat also in Figur 67 I und 67 IV:

$$F = \frac{\rho}{2}(a + b + c + d).$$

Figur 67 I und II.



Figur 67 III und IV.



dagegen:

$$\begin{aligned} F_2 \text{ und } F_4 &= ABMDA - CBMDC \\ &= (ABM + DAM) - (BCM + CDM) \\ &= ABM - BCM - CDM + DAM. \end{aligned}$$

dagegen in Figur 67 II und III:

$$F = \frac{\rho}{2} (a - b - c + d).$$

Nun ist die Strecke ρ jedesmal die gleiche, nämlich 1 cm. Ferner ist:

$a_1 = 2,7$	$b_1 = 1,4$	$c_1 = 1,8$	$d_1 = 3,0$
$a_2 = 3,5$	$b_2 = 1,2$	$c_2 = 0,6$	$d_2 = 4,0$
$a_3 = 2,4$	$b_3 = 1,1$	$c_3 = 0,8$	$d_3 = 2,6$
$a_4 = 5,4$	$b_4 = 2,6$	$c_4 = 1,8$	$d_4 = 4,6$

also:

$$F_1 = \frac{1}{2} (2,7 + 1,4 + 1,8 + 3,0) = \frac{1}{2} \cdot 8,9 = 4,45 \text{ qcm}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} (3,5 - 1,2 - 0,6 + 4,0) = \frac{1}{2} \cdot 5,7 = 2,85 \text{ qcm}$$

$$F_3 = \frac{1}{2} (2,4 - 1,1 - 0,8 + 2,6) = \frac{1}{2} \cdot 3,1 = 1,55 \text{ qcm}$$

$$F_4 = \frac{1}{2} (5,4 + 2,6 + 1,8 + 4,6) = \frac{1}{2} \cdot 14,4 = 7,2 \text{ qcm.}$$

Aufgabe 82. Von einem Dreieck seien gegeben die drei Seiten $a = 15$, $b = 41$, $c = 52$ und ausserdem schon gefunden $F = 234$. Man bestimme die Werte der Radien des Inkreises und der drei Ankreise.

Erkl. 219. Das nebenstehend genannte Dreieck gehört zu den sogen. rationalen Dreiecken, d. h. Seiten, Fläche und Radien bleiben rationale Grössen. Das Dreieck hat gegenüber der grössten Seite c einen stumpfen Winkel (von 130°) und folglich auch den grössten Ankreis, gegenüber der kleinsten Seite a den kleinsten Winkel (von 12°) und den kleinsten Ankreis.

Auflösung. Zur Bestimmung der vier Radien bildet man zunächst:

$$a + b + c = 2s = 108$$

$$s = 54$$

$$s - a = 39, \quad s - b = 13, \quad s - c = 2.$$

Dann ist nach Erkl. 52:

$$\rho_0 = \frac{F}{s} = \frac{234}{54} = 4 \frac{1}{3}.$$

$$\rho_a = \frac{F}{s - a} = \frac{234}{39} = 6,$$

$$\rho_b = \frac{F}{s - b} = \frac{234}{13} = 18,$$

$$\rho_c = \frac{F}{s - c} = \frac{234}{2} = 117.$$

Aufgabe 83. Einem gegebenen Kreise mit Radius 10 wird ein Deltoid eingeschrieben (angeschrieben), dessen gleiche Seitenpaare die Werte 9 und 5 haben. Welches ist die Fläche des Deltoids?

Auflösung. Nach Antwort der Frage 22 hat man für das umgeschriebene Deltoid:

$$F = \rho_i \cdot (a + c) = 10 \cdot 14 = 140,$$

und für das angeschriebene Deltoid:

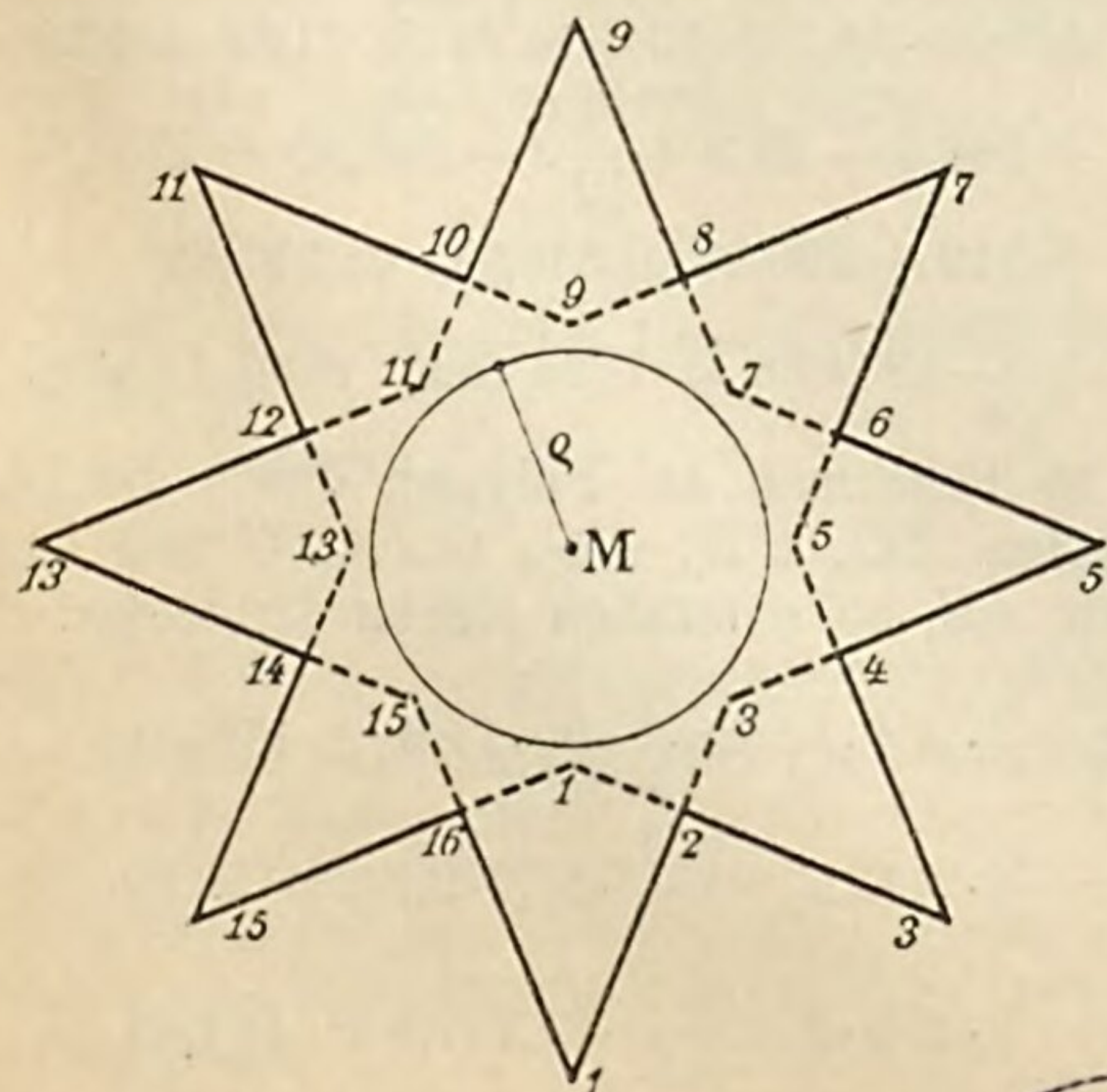
$$F = \rho_a (a - c) = 10 \cdot 4 = 40.$$

Aufgabe 84. Man suche den Radius für den Inkreis eines Rhombus von 140 qcm Fläche und 10 cm Seite.

Auflösung. $F = a \cdot h$ gibt $140 = 10h$,
 $h = 14$, also $\rho = \frac{1}{2}h = 7$.

Aufgabe 85. Es soll der Flächeninhalt der beiden in Figur 68 dargestellten 16-Ecke berechnet werden.

Figur 68.



Auflösung. Nach Antwort der Frage 23 ist die gesuchte Fläche dargestellt durch die Formel $\frac{n \cdot a \cdot \rho}{2} = 8 \cdot a \cdot \rho$. Misst man nun ρ jedesmal = 1 cm, und die Seite des grösseren zu 1,5, die des kleineren zu 0,65 cm, so wird $F_1 = 12$ qcm, $F_2 = 5,2$ qcm. Der Unterschied beider von 6,8 qcm verteilt sich auf die acht Deltoide und ergibt für jedes 0,85 qcm.

Erkl. 220. Einzeln gerechnet für eines der Deltoide nach Figur 67 II oder Antwort der Frage 22 ergibt sich:

$$F = \rho_a (a - c) = 1 \cdot (1,5 - 0,65) = 0,85 \text{ qcm.}$$

Aufgabe 86. Die Gestalt eines Grundstückes sei in Figur 69 in 1000-facher Längenverkürzung aufgezeichnet. Es soll seine Fläche auf verschiedene Weise ermittelt werden.

Auflösung. 1) Zieht man die Diagonale AE nebst den zugehörigen Loten, so erhält man für die Abschnitte x und y folgende Werte in Millimetern:

	1	2	3	4	5	6	7	
x	3,3	6,8	10,8	18,8	29,6	36,4	52,8	$x_8 = AE = 55,6$
y	20	17	13,3	9	15,1	33,1	18,5	

Demnach wird:

$$AJX_3 = \frac{x_3 y_3}{2} = 5,4 \cdot 13,3,$$

$$ABX_2 = \frac{x_2 y_2}{2} = 3,4 \cdot 17,$$

$$EDX_5 = \frac{(x_8 - x_5) y_5}{2} = 13 \cdot 15,1,$$

$$EFX_7 = \frac{(x_8 - x_7) \cdot y_7}{2} = 1,4 \cdot 18,5.$$

Ferner:

$$X_1 X_3 HJ = \frac{(x_3 - x_1)(y_3 + y_1)}{2} = \frac{7,5 \cdot 33,3}{2},$$

$$X_1 X_6 GH = \frac{(x_6 - x_1)(y_6 + y_1)}{2} = \frac{33,1 \cdot 53,1}{2},$$

$$X_2 X_4 BC = \frac{(x_4 - x_2)(y_2 + y_4)}{2} = \frac{12 \cdot 26}{2},$$

$$X_4 X_5 CD = \frac{(x_5 - x_4)(y_4 + y_5)}{2} = \frac{10,8 \cdot 24,1}{2},$$

$$X_6 X_7 FG = \frac{(x_7 - x_6)(y_6 + y_7)}{2} = \frac{16,4 \cdot 51,6}{2},$$

Also:

$$\begin{aligned} ABCDEFGHJ &= 5,4 \cdot 13,3 + 3,4 \cdot 17 + 13 \cdot 15,1 + 1,4 \cdot 18,5 \\ &+ \frac{1}{2} (-7,5 \cdot 33,3 + 33,1 \cdot 53,1 + 12 \cdot 26 \\ &+ 10,8 \cdot 24,1 + 16,4 \cdot 51,6) = 71,82 + 57,8 \\ &+ 196,3 + 25,9 + \frac{1}{2} (-249,75 + 1757,61 \\ &+ 312 + 260,28 + 846,24) = 351,82 \\ &+ \frac{1}{2} \cdot 2944,38 = 1824 \text{ qmm, rund } 18 \text{ qcm.} \end{aligned}$$

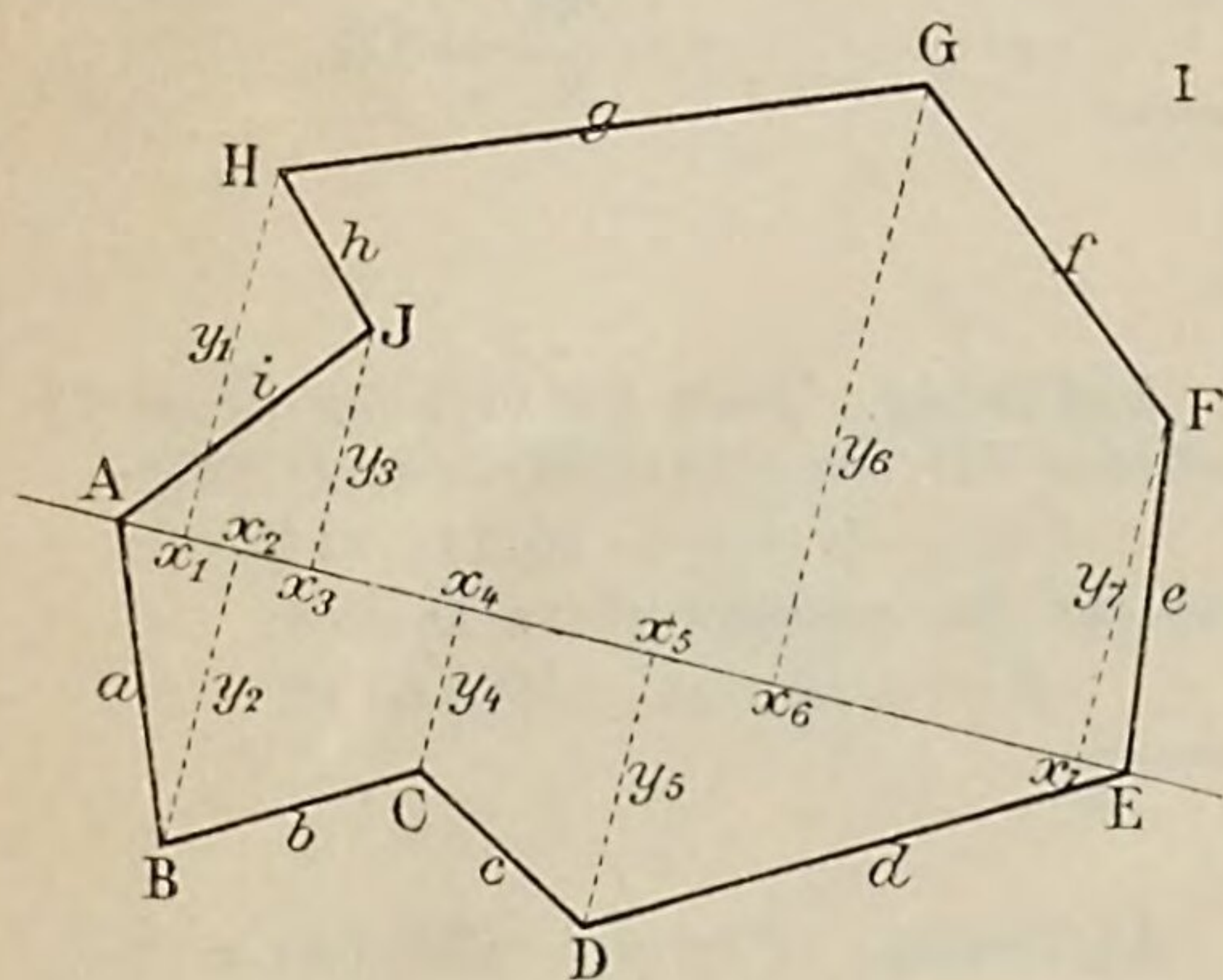
2) Teilt man das Polygon durch die Diagonalen AC , CE , EG , GJ , JC und dann noch JE , so entstehen sieben Dreiecke:

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 11,8 = 118,00$$

$$\triangle CDE = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot 37,2 \cdot 8,2 = 152,52$$

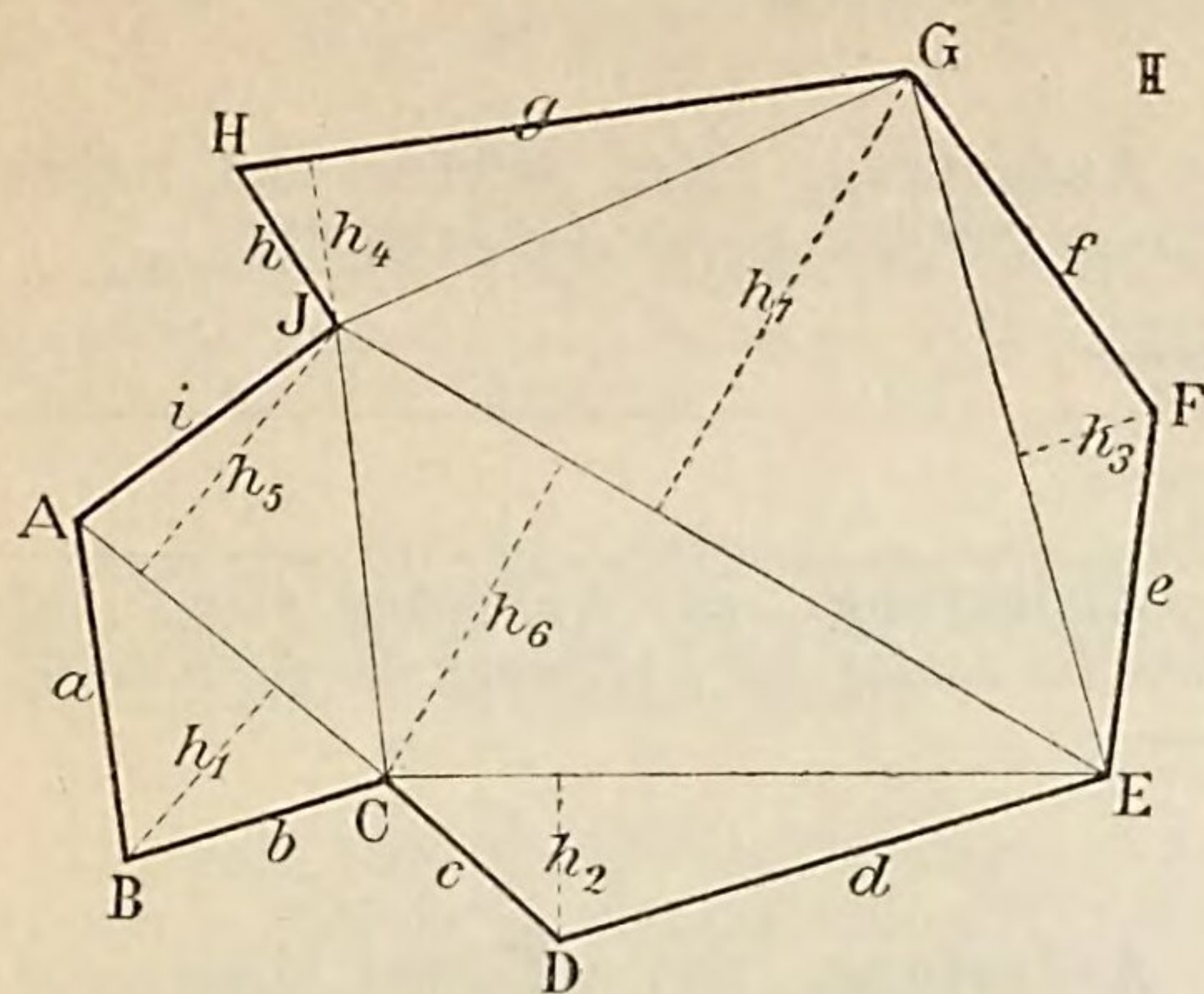
$$\triangle EFG = \frac{1}{2} \cdot EG \cdot h_3 = \frac{1}{2} \cdot 37,7 \cdot 7,3 = 137,61$$

Figur 69 I.



Erkl. 221. Von den nebenstehenden drei Ausführungen derselben Aufgabe hat jede einzelne Vorteile und Nachteile für die Praxis, welche je nach den vorliegenden Umständen der einen oder andern den Vorzug geben lassen. So ist es ein Vorzug der ersten, dass die Senkrechten alle auf einer einzigen Linie aufstehen, also sämtlich parallel sind, und dass auf dieser einzigen Linie mehrfach Messungen vorgenommen werden, bei der zweiten Art hat man den Vorteil, alle Subtraktionen zu vermeiden, bei der dritten gehen alle Messungen der Senkrechten von einem möglichst vorteilhaft zu wählenden Punkte aus, die übrigen Längen sind die Seitenstrecken der Figur selbst.

Figur 69 II.



Erkl. 222. In der zweiten und dritten Ausführung kommen mehrere Dreiecke identisch vor. Dieselben werden aber mit verschiedenen Grundseiten und Höhen behandelt, können also auch kleine Unterschiede im Ergebnis liefern. So wird Dreieck:

ABC erst 118,00,

dann $116,96$: Differenz $- 0,88 \%$,

CDE erst 152,52,

dann $151,98$: Differenz $- 0,36 \%$,

ACJ erst 165,24,

dann $166,63$: Differenz $+ 0,84 \%$.

Erkl. 223. Während in Figur 69 I das Trapez $X_1 X_3 JH$ abgezogen werden muss, weil Dreieck $AX_3 J$ und Trapez $X_1 X_6 GH$ dessen Fläche doppelt überdecken, gilt dasselbe in Figur 69 III vom Dreieck CJH , denn Dreieck CGH bedeckt ein Stück der Ebene, welches gar nicht zum Polygon gehört, und ferner ein Stück des Dreiecks ACJ doppelt, und diese beiden überschüssigen Stücke ergeben zusammen das Dreieck CJH , so dass dieses von der Summe der übrigen abgezogen werden muss.

Erkl. 224. Für das Gesamtergebnis erhält man genau:

1) 1824 qm

2) 1790 qm

3) 1802 qm

Mittel $5416 : 3 = 1805$ qm oder 18 Ar 5 qm.

Da 1802 nahe in der Mitte von den beiden äussersten Massen liegt, so kann man rechnen, dass die Fehlergrenze unter 2% liegt. Die Grundfläche 18 Ar in runder Zahl wird für die praktische Verwendung mit genügender Genauigkeit erreicht.

$$\triangle GHJ = \frac{1}{2} \cdot GH \cdot h_4 = \frac{1}{2} \cdot 34,8 \cdot 8,3 = 144,42$$

$$\triangle JAC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h_5 = \frac{1}{2} \cdot 20,4 \cdot 16,2 = 165,24$$

$$\triangle CEJ = \frac{1}{2} \cdot EJ \cdot h_6 = \frac{1}{2} \cdot 46,8 \cdot 19,4 = 453,96$$

$$\triangle GEJ = \frac{1}{2} \cdot EJ \cdot h_7 = \frac{1}{2} \cdot 46,8 \cdot 26,4 = 617,76$$

Also $ABCDEFGHJ = 1790$ qmm,
rund 18 qcm.

3) Teilt man das Polygon bloss durch Linien vom Punkte C aus, so entstehen wieder sieben Dreiecke, welche die Polygonseiten zu Grundseiten und die Senkrechten darauf von C aus als Höhen haben.

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot 17,2 \cdot 13,6 = 116,96$$

$$\triangle CDE = \frac{1}{2} \cdot d \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot 29,8 \cdot 10,2 = 151,98$$

$$\triangle CEF = \frac{1}{2} \cdot e \cdot h_3 = \frac{1}{2} \cdot 19,6 \cdot 47,1 = 363,58$$

$$\triangle CFG = \frac{1}{2} \cdot f \cdot h_4 = \frac{1}{2} \cdot 22,0 \cdot 44,2 = 486,2$$

$$\triangle CGH = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_5 = \frac{1}{2} \cdot 35,0 \cdot 32,4 = 567,0$$

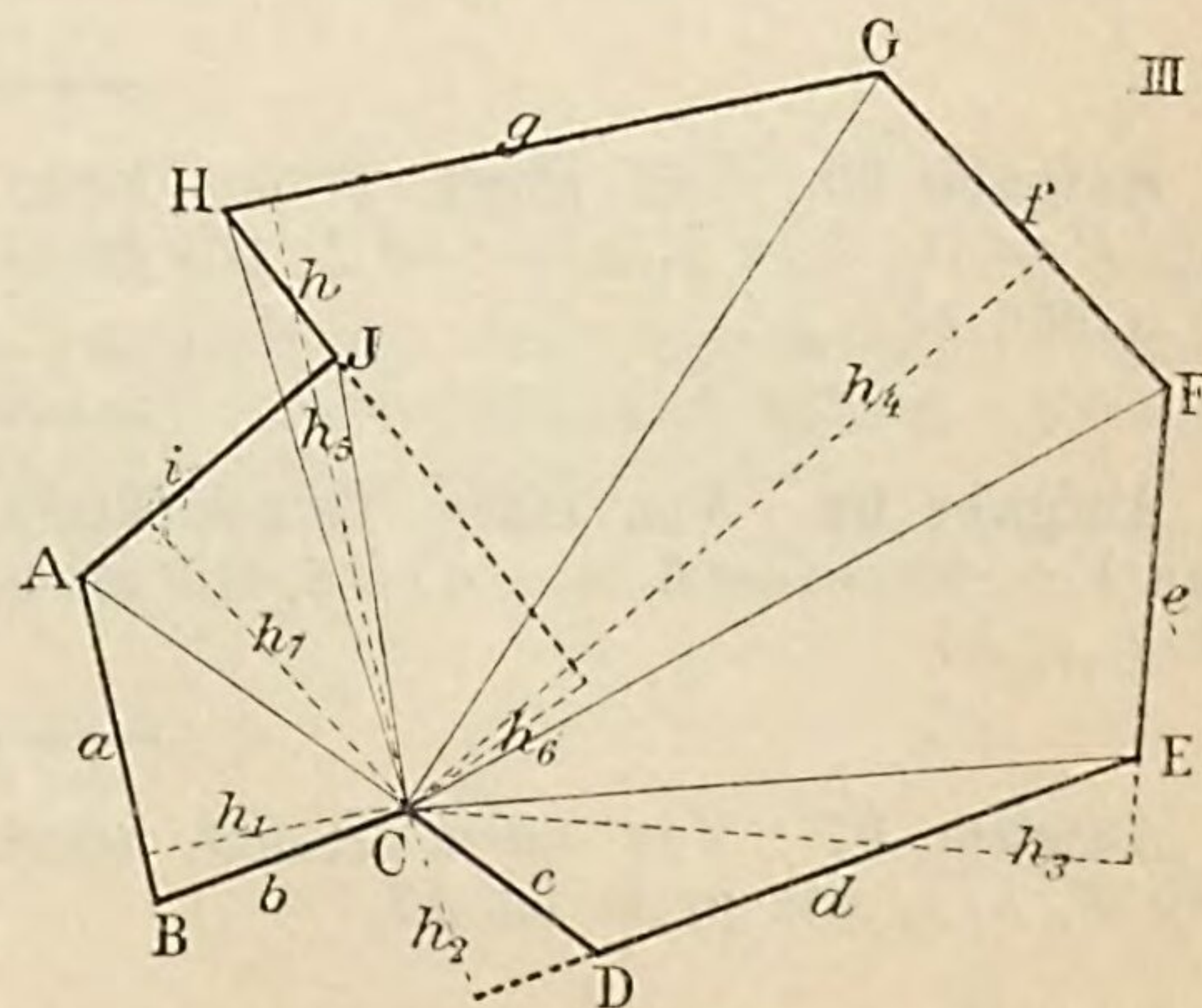
$$-\triangle CHJ = -\frac{1}{2} \cdot h \cdot h_6 = -\frac{1}{2} \cdot 9,2 \cdot 11,0 = -50,60$$

$$\triangle CJA = \frac{1}{2} \cdot i \cdot h_7 = \frac{1}{2} \cdot 17,0 \cdot 19,8 = 166,63.$$

Addiert man nun sämtliche Dreiecke bis auf das negativ zu rechnende $\triangle CJH$, so kommt $1852,35 - 50,60 = 1802$ qmm, also wieder rund 18 qcm.

Für die Naturgrösse wären nun statt der mm Meter zu setzen, also statt cm Dekameter, so dass die Fläche des zu messenden Grundstücks auf 18 Ar sich ergibt.

Figur 69 III.



b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 87. Man zeichne Dreiecke und bestimme deren Inhalt auf dreifache Weise:

a) $g = 325,79 \text{ m}$, $h = 67,83 \text{ m}$,

b) $g = 763,05 \text{ m}$, $h = 9,37 \text{ cm}$?

Andeutung. Man zeichne und rechne, wie in Auflösung der Aufgabe 65.

Aufgabe 88. Von einem Dreieck sei $F = 7325,26 \text{ qm}$, $g = 58,97 \text{ m}$, wie gross ist die Höhe?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 66.

Aufgabe 89. Von einem Dreieck sei $F = 625,8305 \text{ Ar}$, $h = 1275 \text{ cm}$, wie gross ist die Grundseite?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 66.

Aufgabe 90. Man kennt von einem Dreieck $h_a = 7$, $h_b = 9$, $a = 10$, wie gross ist b ?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 67.

Aufgabe 91. Von einem rechtwinkligen Dreieck kenne man $a = 0,3$, $b = 0,4$, $h_c = 0,24$, wie gross ist c ?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 69.

Aufgabe 92. Ueber gegebener Grundseite AB soll ein Dreieck gezeichnet werden mit vorgeschriebenem $\sphericalangle \gamma$ und Fläche F .

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 71.

Aufgabe 93. Welche Grundseite erhält ein Parallelogramm von beliebiger Höhe, dessen Seiten durch die Mitten der nicht-parallelen Seiten eines Trapezes gehen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 72.

Aufgabe 94. Welche Figur entsteht, wenn in Aufgabe 73 eine Ecke selbst als Dreiecksspitze gewählt wird?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 73 und 77.

Aufgabe 95. Von einem Trapez kennt man $F = 10$, $h = 5$, $a - c = 2$; wie gross ist a und c ?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 74.

Aufgabe 96. Von einem Trapez kennt man $F = 90$, $m = 6$, $a - c = 6$, wie gross ist a , c , h ?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 74.

Aufgabe 97. Von einem Trapez kennt man F , h , c , wie gross ist a ?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 76.

Aufgabe 98. Ein Deltoid hat $F = 24$, $e = 4$. Wie gross ist f ?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 78.

Aufgabe 99. Welche Diagonalen hat ein Rhombus von 4 m Höhe, 6 m Seite, wenn die Summe der Diagonalen 14 ist?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 79.

Aufgabe 100. Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck hat Hypotenusenlänge 8. Welche Fläche, welche Schenkel?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 80.

Aufgabe 101. Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck hat Schenkellänge 8. Welche Fläche und welche Hypotenuse?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 80.

Aufgabe 102. Einem Kreis mit Radius 22 ist ein Fünfeck umgeschrieben mit den Seiten $a = 41$, $b = 26$, $c = 35$, $d = 37$, $e = 31$. Man bestimme seine Fläche.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 81.

Aufgabe 103. Welche Berührungsradien hat ein Dreieck, von welchem man kennt: $a = 5$, $b = 6,9$, $c = 7,3$, $F = 16,56$?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 82.

Aufgabe 104. Ein umgeschriebenes Deltoid hat die Seitenpaare 6 und 10 und Fläche 40. Welches sind die Radien des ein- und angeschriebenen Kreises?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 83.

Aufgabe 105. Einem Kreise von 2 cm Radius soll ein Rhombus von 32 qm Fläche umgeschrieben werden. Wie gross muss dessen Seite werden?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 84.

Aufgabe 106. Es soll nach den drei Arten der Aufgabe 86 die Fläche der Figur 16 bestimmt werden.

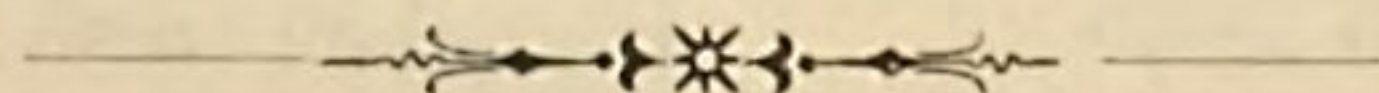
Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 86.

Aufgaben 107 bis 110. Man soll folgende Sätze beweisen:

- a) Dreiecke mit gleicher Fläche und Grundseite haben gleiche Höhe.
- b) Dreiecke mit gleicher Fläche und Höhe haben gleiche Grundseite.
- c) Dreiecke mit gleichen Grundseiten verhalten sich wie ihre Höhen.
- d) Dreiecke mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundseiten.

Andeutung. Man beachte die Formeln für den Flächeninhalt und bilde dieselben für verschiedene Figuren.

Aufgabe 111. Wie verhalten sich die Inhalte zweier Trapeze zwischen denselben Parallelen?



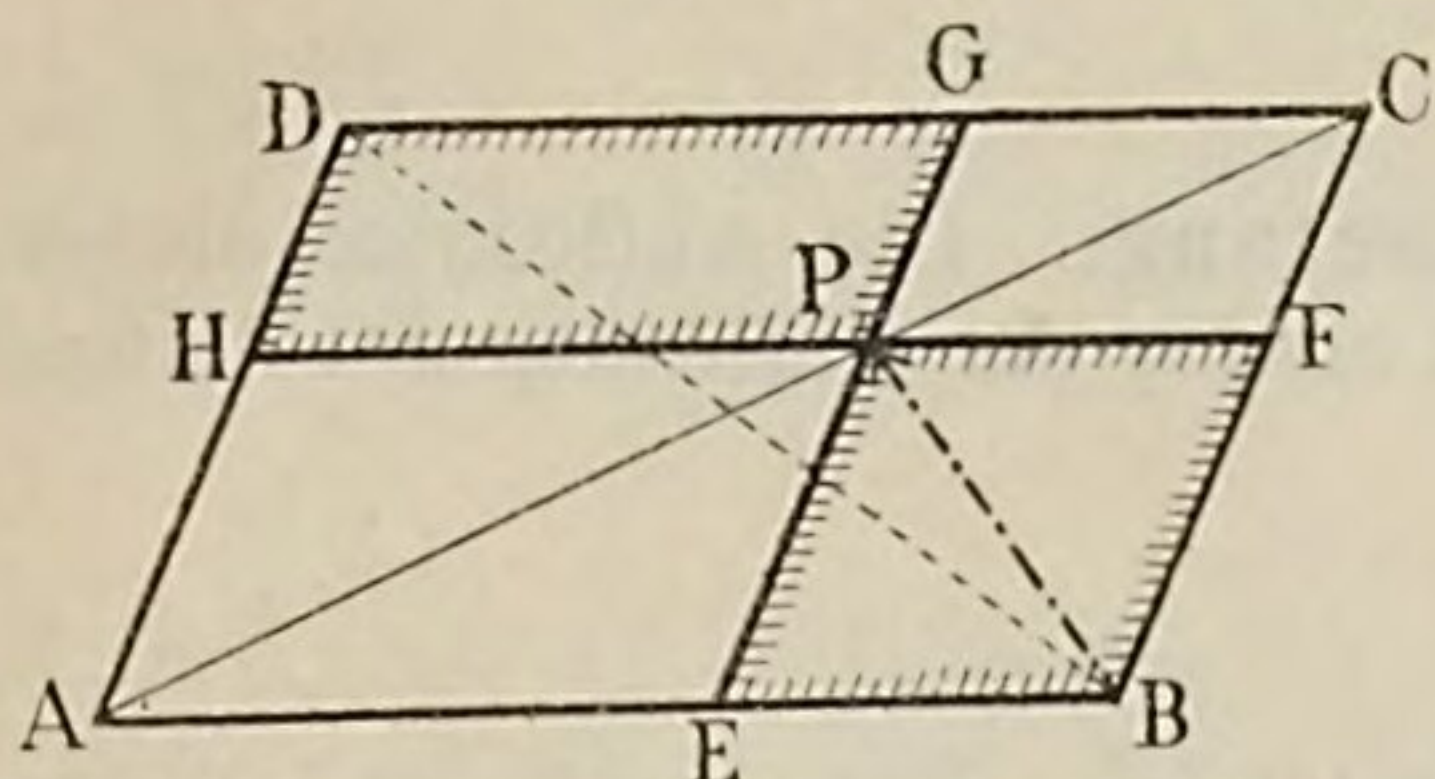
3) Aufgaben über besondere Flächenbeziehungen.

(Zu Abschnitt 3; Grösster Inhalt.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 112. Man soll in ein gegebenes Parallelogramm die Ergänzungsparallelogramme so eintragen, dass deren eines (Ecke B) ein Rhombus wird.

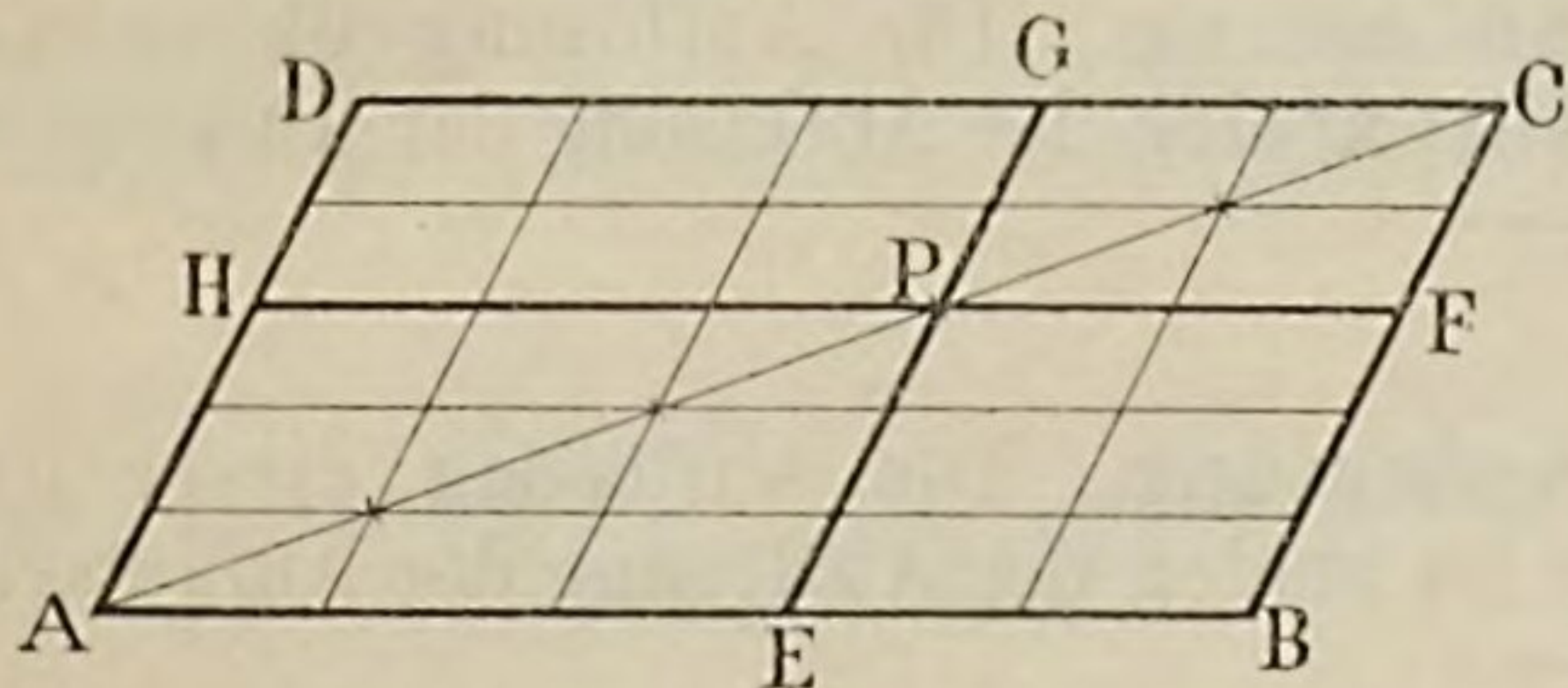
Figur 70.



Erkl. 225. Im allgemeinen kann die Halbierende des Winkels bei B nicht mit der Diagonale des grossen Parallelogramms zusammenfallen. Ist dies doch einmal der Fall, so muss auch das grosse Parallelogramm ein Rhombus sein.

Aufgabe 113. Man teile die Diagonale eines Parallelogramms in 5 gleiche Teile, ziehe durch den dritten Teilpunkt die Parallelen und bestimme die Fläche der Figurenteile.

Figur 71.



Erkl. 226. In den Ecken A und C müssen immer Parallelogramme entstehen, deren Flächen-teile eine Quadratzahl bilden, da die Seiten AE und AH in gleichviele Teile, und auch CF und CG in gleichviele Teile durch die Hilfslinien zerlegt werden. Dagegen müssen die Ergänzungsparallelogramme wegen ihrer ungleichen Seiten solche Produkte bilden, dass mit jenen beiden Quadratzahlen das Quadrat der Teilungszahl entsteht.

Aufgabe 114. Was für Ergänzungsparallelogramme entstehen, wenn das grosse Parallelogramm $ABCD$ ein Rhombus ist?

Auflösung. Damit das Parallelogramm $EBFP$ in Figur 17 ein Rhombus wird, muss die Linie BP als Diagonale desselben die Winkel EBF und FPE halbieren. Man findet also den Punkt P , indem man die Halbierungslinie des Winkels β mit der Diagonalen AC zum Schnitt bringt und durch diesen Punkt die Parallelen zieht.

Auflösung. Ist AP in Figur 71 gleich drei Fünfteln und PC gleich zwei Fünfteln von AC , so kann man sich durch die übrigen Teilpunkte ebenfalls Parallelen gezogen denken, und erhält so das Parallelogramm zerschnitten sowohl in 5 gleichgrosse Querstreifen, als in 5 gleiche Längsstreifen, also im ganzen in 25 gleichgrosse Parallelogramme. Von diesen liegen im Parallelogramm $AEPH$ neun, im Parallelogramm $PFCG$ vier, und in jedem der Ergänzungsparallelogramme je sechs, also ist jedes der letztern $\frac{6}{25}$ des ganzen, die beiden andern $\frac{9}{25}$ und $\frac{4}{25}$, zusammen $\frac{2 \cdot 6 + 9 + 4}{25} = \frac{25}{25} = 1$.

Auflösung. Wenn $ABCD$ ein Rhombus ist, so werden auch $AEPH$ und $PFCG$ Rhomben, also:

Erkl. 227. Die Kongruenz der Ergänzungsparallelogramme folgt beim Rhombus auch aus der achsigen Symmetrie der gesamten Figur zur Diagonale als Achse. Daraus erkennt man auch, dass die Ergänzungsparallelogramme ungleichwändig kongruent sind.

$$BF = EP = HP = DG$$

und

$$BE = FP = GP = DH.$$

Daher haben die Ergänzungsparallelogramme gleiche Seiten und gleiche Winkel, sind also kongruent.

Aufgabe 115. Man bestätige Antwort der Frage 26 am Quadrat der Strecke $(3a + 2a)$.

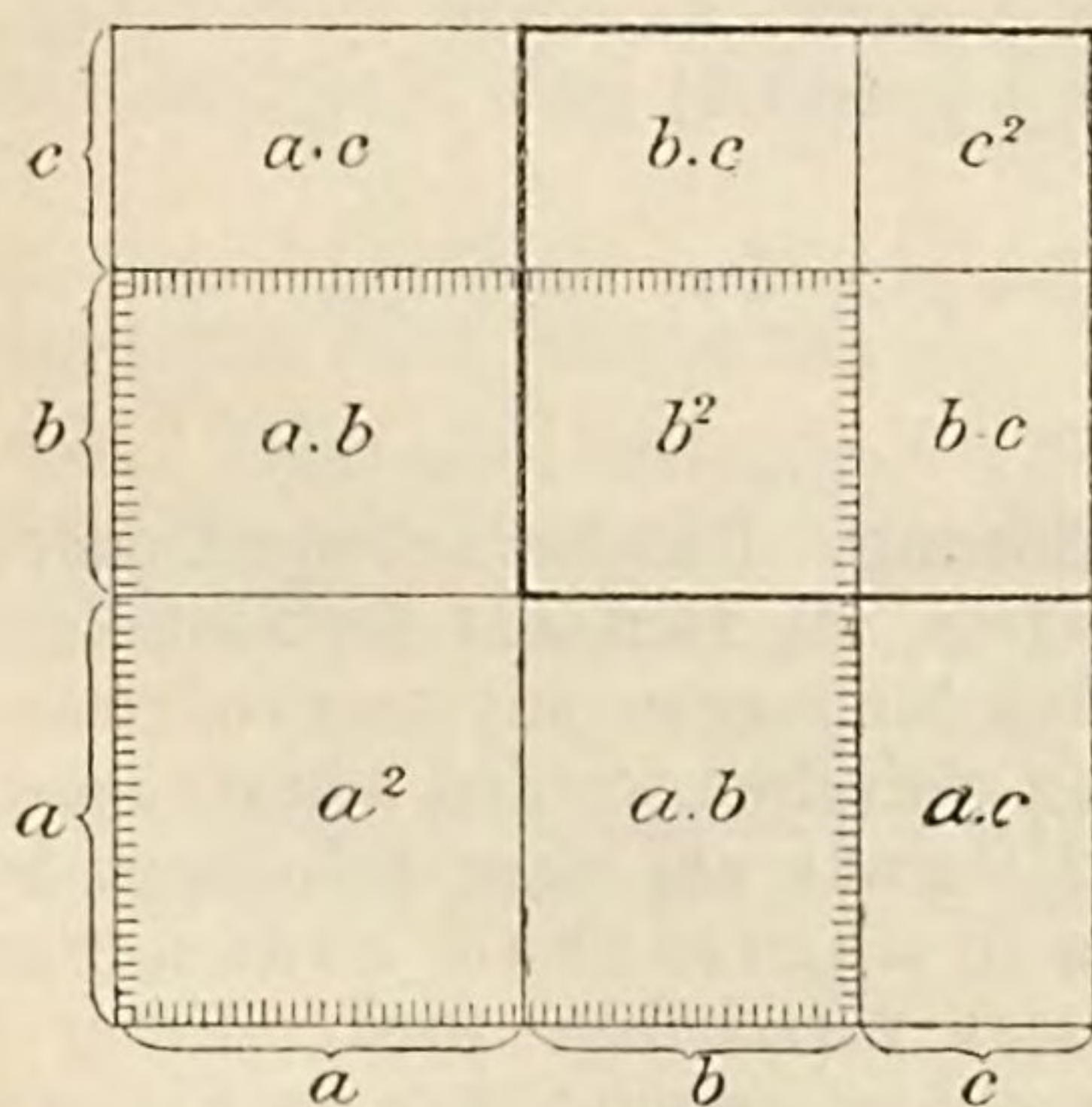
Erkl. 228. Es bedarf nicht der Zeichnung einer neuen Figur, wenn man sich bloss in Figur 71 vorstellen kann, dass die Winkel rechte und die Seiten alle gleichgross seien. Es zeigt sich dabei zugleich die Uebereinstimmung der Formel mit der Figur, dass nämlich die Gesamtfläche sich zusammensetzt aus den beiden ungleichen Eckenquadraten plus den beiden gleichen Ergänzungsparallelogrammen.

Auflösung. Zeichnet man die Strecke a fünfmal, so bildet das Quadrat $25a^2$. Dies setzt sich aber zusammen aus $9a^2$ als Quadrat $AEPH$ (vergl. Figur 71 und Erkl. 228), $4a^2$ als Quadrat $PFCG$ und zweimal je $6a^2$ als „Ergänzungsrechtecke“ $EBFP$ und $GDHP$, also zusammen in der Zusammenstellung der Formel:

$$(3a + 2a)^2 = 9a^2 + 2 \cdot 6a^2 + 4a^2 = 25a^2.$$

Aufgabe 116. Man konstruiere den Ausdruck $(a + b + c)^2$.

Figur 72.



Erkl. 229. Man kann auch zusammenfassen $(b + c)^2$ als Quadrat in der rechten oberen Ecke, bestehend aus $b^2 + 2bc + c^2$. Daran legt sich dann a^2 und zwei Rechtecke je gleich $a(b + c)$, letzteres zerlegt in seine Teile $a \cdot b$ und $a \cdot c$.

Aufgabe 117. Man verschiebe eine geradlinige Strecke längs eines gebrochenen Geradenzuges und beweise, dass die überstrichene Fläche dieselbe ist, als ob die Strecke aus der ersten Lage geradlinig in die letzte verschoben worden wäre.

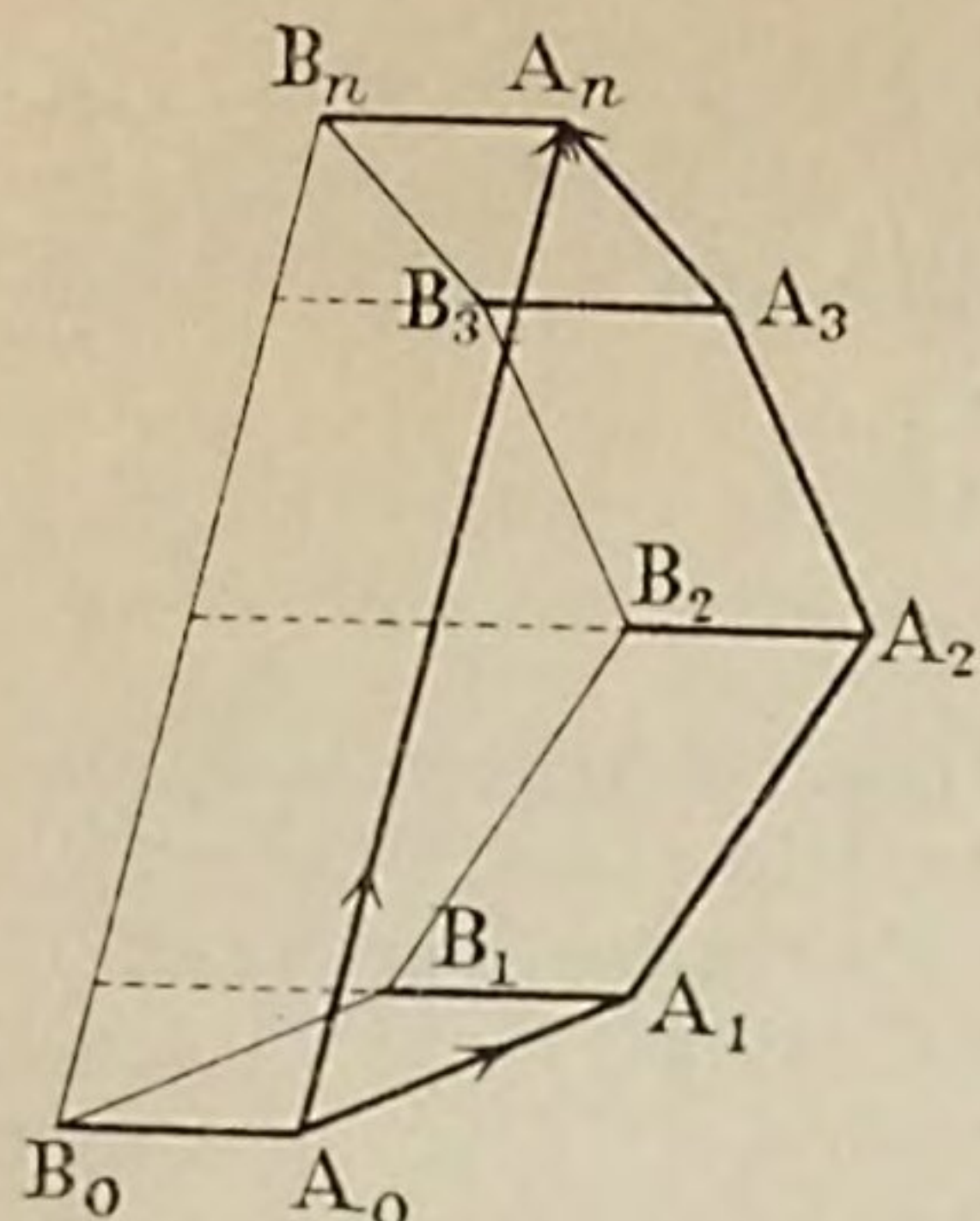
Auflösung. Trägt man auf einer Strecke die Summe dreier Strecken an, und über dem Ganzen das Quadrat samt Parallelen durch alle Teilpunkte, so wird (siehe Figur 72) auch die Figur am leichtesten übersichtlich, wenn man zusammenfasst $(a + b)$ und c . Dann hat man erst ein Quadrat $(a + b)^2$ bestehend aus a^2 , b^2 , $2 \cdot a \cdot b$. Daran legt sich das Quadrat c^2 und zwei Rechtecke, je gleich $(a + b) \cdot c$, zerlegt in $a \cdot c + b \cdot c$. Also:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Auflösung. Sind A_1, A_2, A_3 u. s. w. die Punkte, welche Punkt A_0 durchläuft, so besteht die von AB überstrichene Fläche aus einer Reihe von Parallelogrammen, deren Grundseiten sämtlich parallel und gleich sind:

$$A_0 B_0 \parallel A_1 B_1 \parallel A_2 B_2 \parallel A_3 B_3 \dots$$

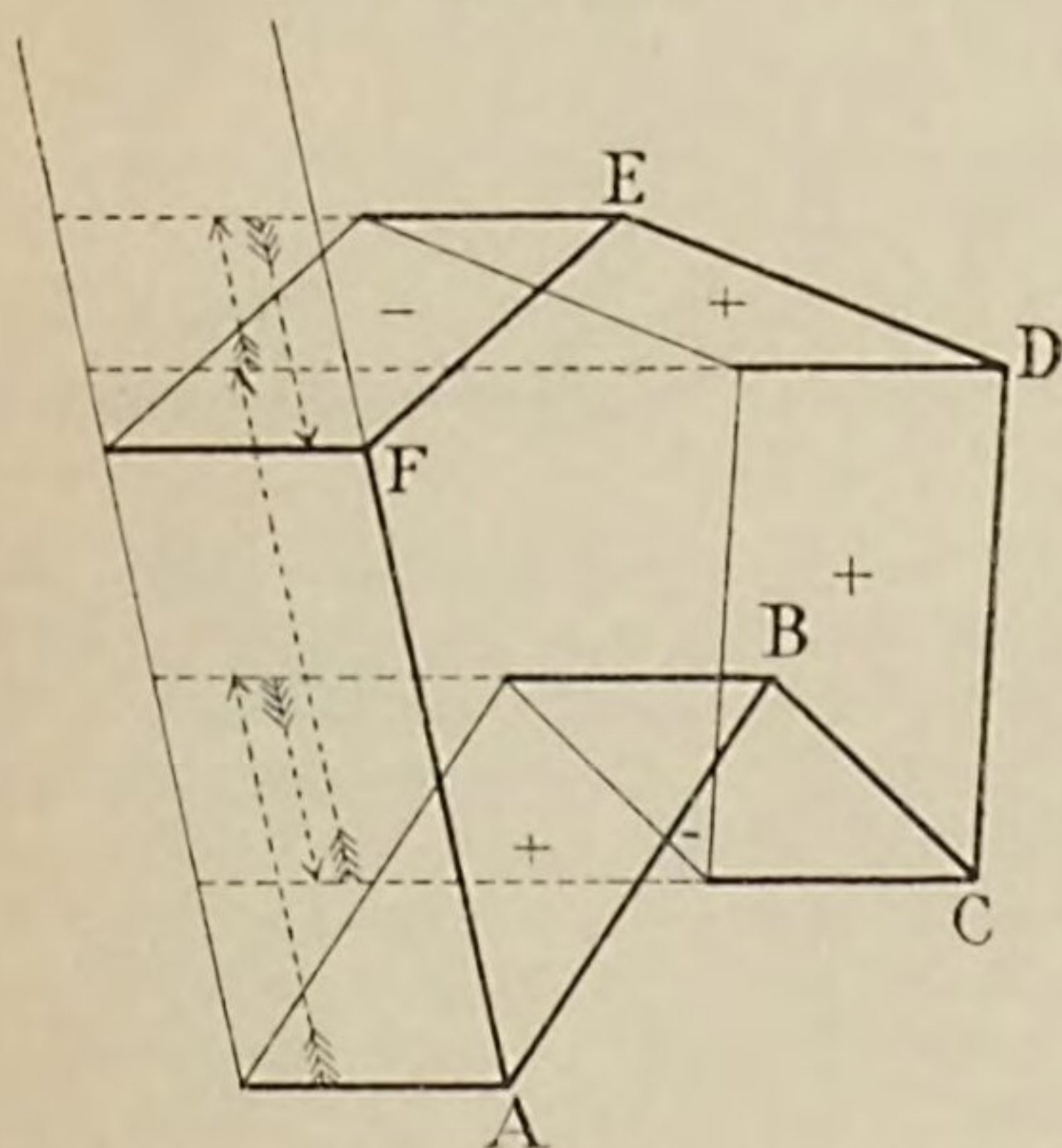
Figur 73.



Erkl. 230. Betrachtet man den Geradenzug $A_0 A_1 A_2 \dots A_n A_0$ als eine geschlossene Figur, so kann man in Erweiterung der Sätze in Antwort der Fragen 30 und 31 auch aussagen: Das Parallelogramm über der Vielecksseite $A_0 A_n$ ist gleich der Summe aller Parallelogramme von gleichlanger und gleichgerichteter Seite über allen andern Seiten des Vielecks. Dabei ist zunächst vorausgesetzt, dass die Seite $A_0 A_n$ das grösste aller Parallelogramme wirklich liefert, d. h. dass die Verschiebung der Parallelen längs $A_0 A_n$ stets in derselben Richtung stattfindet.

Aufgabe 118. Man soll allgemein den Satz beweisen, dass eine Strecke bei Verschiebung längs $n - 1$ Seiten eines beliebigen n -Ecks eine Gesamtfläche überstreicht gleich dem durch Verschiebung längs der n ten Seite erzeugten Parallelogramm.

Figur 74.



Erkl. 231. In Figur 74 sind in dem Parallelstreifen längs AF durch Pfeile die Richtungen angedeutet, in welchen jedes einzelne der Teilparallelogramme zu nehmen ist. Durch wiederholten Auf- und Niedergang gelangt man so wirklich von A nach F .

Verlängert man nun diese Grundseiten bis zum Schnitt mit dem durch geradlinige Bewegung von $A_0 B_0$ nach $A_n B_n$ entstehenden Parallelstreifen, so werden auch aus diesem solche Parallelogramme ausgeschnitten, die sämtlich dieselbe Grundseite $\# A_0 B_0$ haben und deren jedes zwischen denselben Parallelen liegt, also gleiche Höhe hat mit einem der längs $A_1 A_2 A_3 \dots$ entstandenen Parallelogramme. Daher ist einzeln jedes Parallelogramm mit einem der andern gleich und folglich auch die Summe:

$$A_0 A_1 B_0 B_1 + A_1 A_2 B_1 B_2 + A_2 A_3 B_2 B_3 + \dots = A_0 A_n B_0 B_n.$$

Auflösung. Um den nebenstehenden Satz zu beweisen, ist zunächst festzustellen, dass zwei Verschiebungen mit ungleichen Vorzeichen versehen werden müssen, wenn die bewegte Gerade auf einer beliebigen Schnittgeraden in ungleichem Sinne (vor- und rückwärts) verschoben wird. Unter dieser Voraussetzung erkennt man in Figur 74 sofort, dass das Parallelogramm über BC sich von dem über AB subtrahiert, und dass ebenso das Parallelogramm über EF negativ zu nehmen ist. Dann wird in der That die Summe:

$$\# g AB - \# g BC + \# g CD + \# g DE - \# g EF = \# g AF.$$

Aufgabe 119. Welches ist der grösste und welches der kleinste Wert der Projektion einer Strecke a auf eine Linie g , und wann wird jeder erreicht?

Erkl. 232. Wenn $a \parallel g$, so bilden die Projektionsstrahlen mit a und g ein Rechteck von beliebiger Höhe; wenn $a \perp g$, so fallen die Projektionsstrahlen mit a selbst zusammen, die Projektion wird ein Punkt. Jede Bewegung von a , bei der a nicht sich selbst parallel bleibt, bringt Aenderung der Projektion.

Auflösung. Der grösste Wert, den die Projektion erhalten kann, ist gleich a und wird erreicht, wenn $a \parallel g$; der kleinste Wert ist Null und wird erreicht, wenn $a \perp g$; jedesmal ohne alle Rücksicht auf nahe oder ferne Lage von a und g .

Aufgabe 120. Man soll beweisen, dass unter allen Dreiecken mit gleichem Inhalt über gleicher Grundseite das gleichschenklige Dreieck dasjenige ist, welches den kleinsten Umfang hat.

Erkl. 233. In Aufgabe 103 des III. Teiles wurde bewiesen, dass von allen Punkten einer Linie derjenige die kleinste Abstandssumme von zwei festen Punkten liefert, für welchen diese Abstände beiderseits gleiche Winkel mit der Linie bilden.

Auflösung. Die Grundseite ist allen Dreiecken gemeinsam, die Seiten des gleichschenkligen Dreiecks bilden mit der Parallelen zur Grundseite durch die Spitze beiderseits gleiche Winkel, also ist nach Aufgabe 103 des III. Teiles ihre Summe kleiner als jede andere Summe zweier Verbindungsstrecken.

Aufgabe 121. Welches Dreieck mit gegebenem Inhalt hat den kleinsten Umfang?

Erkl. 234. Man kann nach nebenstehenden Ergebnissen den Satz aussprechen:

Satz. Unter allen Dreiecken mit gleichem Flächeninhalt hat das gleichseitige den kleinsten Umfang.

Umgekehrt:

Satz. Unter allen Dreiecken mit gleichem Umfange hat das gleichseitige den grössten Inhalt.

Auflösung. Ist irgend eine Seite des gesuchten Dreiecks gleich a , so müssen wegen des Ergebnisses der vorigen Aufgabe die beiden andern Seiten einander gleich sein. Da man aber als diese erste Seite a eine beliebige von den dreien herauswählen kann, so muss das gesuchte Dreieck gleichseitig sein.

Aufgabe 122. Man beweise, dass auch unter allen Dreiecken mit gleichem Umfang über derselben Grundseite das gleichschenklige den grössten Inhalt hat.

Erkl. 235. Nebenstehender Beweis, den man als einen indirekten bezeichnen kann, ist auch der Beweis zu der Umkehrung des in Erkl. 234 ausgesprochenen Satzes, der dort behufs Zusammenstellung bereits ausgesprochen wurde.

Auflösung. Ist ABP irgend eines dieser Dreiecke, so gibt es ein gleichschenkliges Dreieck ABQ , welches mit ABP gleiche Grundseite und Höhe, also gleichen Inhalt hat. Dabei hat aber ABQ kleinere Umfang als ABP . Dasjenige gleichschenklige Dreieck ABC aber, welches mit ABP gleichen Umfang hat, muss folglich grösser sein als das gleichschenklige Dreieck ABQ , folglich auch grösser als ABP .

Aufgabe 123. Man soll beweisen, dass dasjenige unter allen Vielecken mit gleichgrosser Seitenzahl und gleichem Inhalte, welches den kleinsten Umfang hat, ein gleichseitiges sein muss.

Auflösung. Würden sich zwei ungleiche Seiten finden, so könnte man aus ihnen mittels

Erkl. 236. Als Umkehrung dieses Beweises kann man ebenfalls den Satz aufstellen:

Satz. Dasjenige unter allen Vielecken mit gleichgrosser Seitenzahl und gleichem Umfange, welches den grössten Inhalt hat, ist ein gleichseitiges.

einer Diagonale ein Dreieck bilden, dasselbe abschneiden und statt seiner das gleichschenklige vom gleichen Inhalte ansetzen. Dadurch bliebe der Gesamtinhalt gleich, der Umfang aber würde verringert — und das so lange, als noch zwei ungleiche Seiten vorhanden wären.

Aufgabe 124. Man soll in einen Kreis ein möglichst grosses Dreieck einzeichnen.

Erkl. 237. Man erhält aus nebenstehender Ueberlegung den Satz:

Satz. Unter allen einem Kreise eingeschriebenen Dreiecken ist das gleichseitige das grösste.

Hiernach wäre also auch Aufgabe 71 so weit einzuschränken, dass der gegebene Dreiecksinhalt dieses Maximum nicht übersteigt.

Auflösung. Das gesuchte Dreieck muss das gleichseitige sein, denn wenn ein ungleichseitiges Dreieck im Kreise ist, so wird sein Inhalt vergrössert, indem man eine Seite als Grundseite festhält und die beiden andern gleich macht, denn dieses neue Dreieck hat gleiche Grundseite, aber grössere Höhe als das vorige.

Aufgabe 125. Man beweise, dass unter allen einem Kreise eingeschriebenen Vielecken derselben Seitenzahl das gleichseitige den grössten Inhalt hat.

Erkl. 238. Nach Aufgabe 141 des IV. Teiles ist dieses Vieleck ein regelmässiges, und als Erweiterung der Aufgaben 123 und 125 wird sich später zeigen, dass diese unter allen Vielecken mit gleichem Umfange den grössten Inhalt haben.

Auflösung. Man beweist, wie in Aufgabe 124, dass wenn irgendwo zwei ungleiche Seiten wären, dann durch Abschneiden derselben ein Dreieck wegfällt, statt dessen ein solches gleichschenkliges mit grösserem Inhalt angefügt werden könnte.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 126. Man soll in ein gegebenes Rechteck die Ergänzungsparallelogramme so eintragen, dass davon eines ein Quadrat wird.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 112.

Aufgabe 127. Können die Ergänzungsparallelogramme beide Rhomben oder beide Quadrate werden?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 112.

Aufgabe 128. Man ziehe die Parallelen durch das erste Drittel der Diagonale und bestimme die Teilflächen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 113.

Aufgabe 129. Wann schneiden sich die Diagonalen der Ergänzungsparallelogramme auf der Hauptdiagonale?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 114.

Aufgabe 130. Wann sind die Diagonalen der Ergänzungsparallelogramme parallel?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 114.

Aufgabe 131. Man beweise durch Konstruktion, dass das Quadrat einer Strecke gleich ist dem vierfachen Quadrat der halben Strecke und gleich einem Viertel des Quadrats über der doppelten Strecke.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 115.

Aufgabe 132. Man konstruiere die Ausdrücke $(a + b - c)^2$ und $(a + b + c + d)^2$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 116.

Aufgabe 133. Der Satz in Antwort der Frage 30 soll nach Aufgabe 117 bewiesen werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 117.

Aufgabe 134. Man beweise, dass wenn eine Strecke längs dem Gesamtumfang eines beliebigen n -Ecks verschoben wird, die überstrichene Gesamtfläche den Wert Null hat.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 118.

Aufgabe 135. Wie muss eine Strecke a gedreht werden, damit ihre Projektion auf eine Gerade g grösser oder kleiner wird?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 119.

Aufgabe 136. Man beweise, dass bei gegebenem Umfang das gleichseitige Dreieck den grössten Inhalt hat.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 120 bis 122.

Aufgabe 137. Man beweise, dass von allen Dreiecken, welche zwei gleichgrosse Seiten haben, das rechtwinklige den grössten Inhalt hat.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 120 bis 122.

Aufgabe 138. Man beweise, dass unter allen Vielecken gleicher Seitenzahl und gleichen Umfanges dasjenige, welches den grössten Inhalt hat, gleichseitig sein muss.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 123.

Aufgabe 139. Man beweise, dass unter allen Rhomben mit gleichem Umfang das Quadrat den grössten Inhalt hat.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 123.

Aufgabe 140. Man beweise, dass auch unter allen beliebigen Vierecken mit gleichem Umfange dasjenige Quadrat den grössten Inhalt hat, welches das Viertel des Umfangs als Seite hat.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 123.

Erkl. 239. Durch die Aufgabenreihe 136 und 138 bis 140 ist der in Erkl. 238 angedeutete allgemeine Satz für das Dreieck und Viereck vollständig bewiesen.

4) Aufgaben über den pythagoreischen Lehrsatz.

(Zu Abschnitt 4.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 141. Man soll aus der Gruppe 5, 12, 13 andere Zifferngruppen bilden, welche die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden können.

Auflösung. Da $5^2 + 12^2 = 13^2$ ist, so ist auch $(5n)^2 + (12n)^2 = (13n)^2$, wo n jede beliebige ganze oder gebrochene Zahl bedeuten kann; also ist eine Gruppe von Zahlen der verlangten Eigenschaft jede von der Form $5n, 12n, 13n$.

Erkl. 240. Wird $n > 1$ genommen, so entstehen grössere, für $n < 1$ kleinere Zahlen als 5, 12, 13. So 50, 120, 130 und 0,05, 0,12, 0,13; oder: 10, 24, 26 und 2,5, 6, 6,5.

Aufgabe 142. Wie gross ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten 13,5 und 35,2 m?

Auflösung. Um die Hypotenuse zu finden, setzt man:

Erkl. 241. Die Wurzelrechnung ergibt:

$$\begin{array}{r} \sqrt{1421,29} = 37,7 \\ \underline{52 : 6} \\ 101 \\ \underline{522 : 74} \\ 49 \end{array}$$

$$c^2 = \sqrt{a^2 + b^2},$$

also:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{13,5^2 + 35,2^2} = \sqrt{182,25 + 1239,04} \\ &= \sqrt{1421,29} = 37,7 \text{ (siehe Erkl. 241).} \end{aligned}$$

Also ist die Hypotenuse gleich 37,7 m.

Aufgabe 143. Wie gross ist die zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenuse 9,37 cm und Kathete 2,15 cm?

Erkl. 242. Die Wurzelrechnung ergibt:

$$\begin{array}{r} \sqrt{83,1744} = 9,12 \\ \underline{21 : 18} \\ 37 \\ \underline{364 : 182} \\ 4 \end{array}$$

Auflösung. Setzt man $a^2 + b^2 = c^2$, so wird:

$$b^2 = \sqrt{c^2 - a^2},$$

also:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{9,37^2 - 2,15^2} = \sqrt{87,7969 - 4,6225} \\ &= \sqrt{83,1744} = 9,12. \end{aligned}$$

Bei der Zerlegung $(c + a)(c - a)$ ist in der Regel (wie nebenstehend) auch Zerlegung des

Radikanden in Faktoren möglich, wodurch die Radizierung erleichtert wird.

Bequemer kann man setzen:

$$\begin{aligned}\sqrt{c^2 - a^2} &= \sqrt{(c + a)(c - a)} \\ &= \sqrt{(9,37 + 2,15)(9,37 - 2,15)} \\ &= \sqrt{11,52 \cdot 7,22} = \sqrt{8 \cdot 1,44 \cdot 2 \cdot 3,61} \\ &= \sqrt{4^2 \cdot 1,2^2 \cdot 1,9^2} = 4 \cdot 1,2 \cdot 1,9 = 9,12.\end{aligned}$$

Aufgabe 144. In einem spitzwinkligen Dreieck sei $b = 2,6$, $c = 1,7$, bestehend aus $p = 0,7$ und $q = 1$; man berechne die Seite a .

Erkl. 243. Rückwärts kann man p_b berechnen, weil $c \cdot q_c = b \cdot p_b$, also:

$$p_b = \frac{c \cdot q_c}{b} = \frac{1,7}{2,6} = 0,65;$$

und so weiter alle Stücke des Dreiecks.

Auflösung. Da $a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$ ist, so entsteht:

$$\begin{aligned}a^2 &= 2,6^2 + 1,7^2 - 2 \cdot 1,7 = 6,76 + 2,89 - 3,4 \\ &= 6,25;\end{aligned}$$

also wird $a = 2,5$.

Aufgabe 145. In einem stumpfwinkligen Dreieck sei $c = 3,7$, $b = 1,5$, bestehend aus $p_b = 1,14$ und $q_b = 2,64$. Wie gross ist a ?

Erkl. 244. Auch hier können die weiteren Stücke des Dreiecks gerechnet werden. (Siehe später bei den Anwendungen des pythagoreischen Lehrsatzes.)

Auflösung. Im stumpfwinkligen Dreieck ist $a^2 = b^2 + c^2 + 2bp_b$; also erhält man:

$$\begin{aligned}a^2 &= 1,5^2 + 3,7^2 + 2 \cdot 1,5 \cdot 1,14 \\ &= 2,25 + 13,69 + 3,42 = 19,36 = 16 \cdot 1,21.\end{aligned}$$

Demnach wird:

$$a = \sqrt{16 \cdot 1,21} = 4 \cdot 1,1 = 4,4.$$

Aufgabe 146. Was für ein Dreieck entsteht, wenn zu den festen Seiten $a = 15$ und $b = 8$ als dritte Seite c hinzukommt erst 16, dann 17, dann 18?

Erkl. 245. Ist $\sphericalangle \gamma$ im Dreieck 15, 8, 16 ein spitzer, so muss das ganze Dreieck spitzwinklig sein, da hier keine grössere Seite als c vorhanden ist, also auch kein grösserer Winkel als γ .

Auflösung. Bildet man:

$a^2 + b^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289 = 17^2$, so erkennt man, dass im Dreieck 15, 8, 17 der $\sphericalangle \gamma$ ein rechter ist, dagegen für 15, 8, 16 ein spitzer und für 15, 8, 18 ein stumpfer Winkel.

Aufgabe 147. Wie lässt sich erkennen, ob ein aus drei gegebenen Seiten zu bildendes Dreieck spitz-, recht- oder stumpfwinklig ist?

Erkl. 246. Die grösste Seite ist die einzig massgebende, da ja ihr der grösste Winkel gegenüberliegt. Ist der grösste Winkel spitz, so sind dies die beiden andern von selbst; ist der grösste $\geq 90^\circ$, so müssen die andern spitz sein.

Auflösung. Man bildet das Quadrat der drei Seiten und vergleicht das Quadrat der grössten Seite mit der Summe der Quadrate der beiden kleinen. Je nachdem ersteres grösser, gleich oder kleiner als diese Summe ist, ist das Dreieck spitz-, recht- oder stumpfwinklig.

Aufgabe 148. Von welcher Art ist ein Dreieck mit Seiten $a = 5$, $b = 9$, $c = 12$?

Auflösung. Man bildet $5^2 + 9^2 = 108$ und $12^2 = 144$, also hat das Dreieck einen stumpfen Winkel γ ; dagegen $\beta > \alpha$, beide spitz.

Aufgabe 149. Wie lässt sich Satz 16 unmittelbar aus dem pythagoreischen ableiten?

Erkl. 247. Da aus der Gleichung $h^2 = p \cdot q$ sich die Proportion bilden lässt:

$$p : h = h : q,$$

so sagt man auch, die Höhe sei die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse, und ebenso nach Satz 12 je eine Kathete die mittlere Proportionale zwischen dem ganzen Durchmesser und ihrem anliegenden Höhenabschnitt.

Auflösung. Setzt man $a^2 + b^2 = c^2$ und hierin für $c = p + q$, so entsteht:

$$a^2 + b^2 = (p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq.$$

Nimmt man p^2 und q^2 auf die linke Seite, so wird:

$$a^2 - p^2 + b^2 - q^2 = 2pq,$$

also:

$$h^2 + h^2 = 2pq \text{ oder } h^2 = pq.$$

Aufgabe 150. Man berechne die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenusenabschnitten $p = 18$, $q = 98$.

Erkl. 428. Auch hier führt Faktorenzerlegung des Radikanden in der Regel zu einer Erleichterung der Rechnung.

Auflösung. Da $h^2 = p \cdot q$ ist, so wird:

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{18 \cdot 98} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 49} \\ &= \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42. \end{aligned}$$

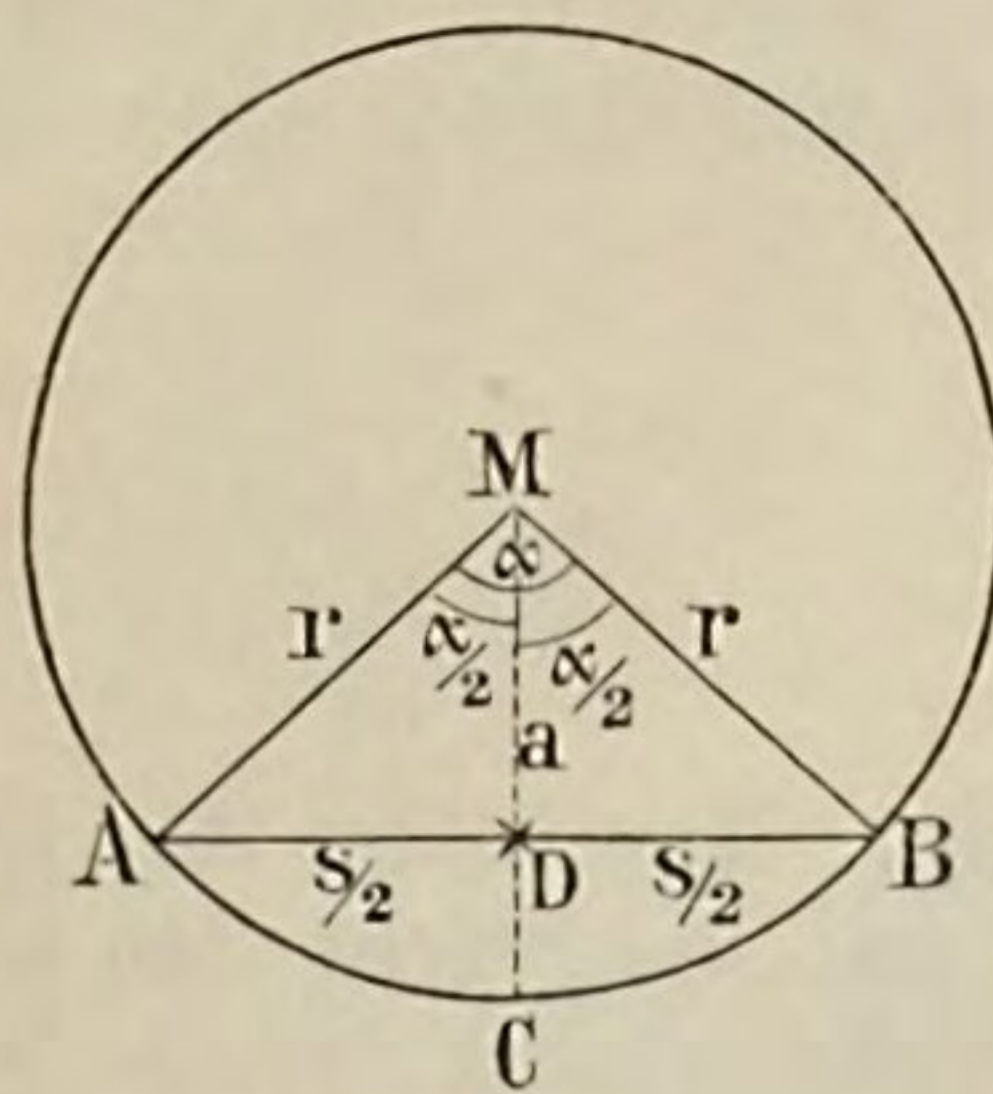
Aufgabe 151. In einem Kreise von 12 cm Radius ist eine Sehne von 15 cm eingetragen. Wie gross ist ihre Projektion auf den Durchmesser?

Auflösung. Ist die Sehne s , die Projektion p , so ist $s^2 = 2r \cdot p$, also:

$$p = \frac{s^2}{2r} = \frac{225}{24} = 9,375 \text{ cm.}$$

Aufgabe 152. Wie gross ist der Abstand einer Sehne von der Länge s vom Zentrum des Kreises mit Radius r ?

Figur 75.



Auflösung. Bezeichnet man den gesuchten Abstand mit a , so bildet (siehe Figur 75) a mit der Hälfte der Sehne $\frac{s}{2}$ und dem Radius r ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem r Hypotenuse ist, also:

$$r^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + a^2$$

und

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - s^2} = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 - s^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(d+s)(d-s)}. \end{aligned}$$

Erkl. 249. Aus $\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}$ erhält man zunächst durch Gleichnamigmachen:

$$\sqrt{\frac{4r^2}{4} - \frac{s^2}{4}} = \sqrt{\frac{4r^2 - s^2}{4}} = \frac{\sqrt{4r^2 - s^2}}{2}.$$

Da nun $2r = d$, dem Durchmesser des Kreises ist, so wird $4r^2 = (2r)^2 = d^2$, also:

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 - s^2}.$$

Aufgabe 153. Wie lange ist die Sehne mit Abstand a vom Kreismittelpunkte?

Erkl. 250. Da:

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 - s^2},$$

so wird:

$$2a = \sqrt{d^2 - s^2},$$

also:

$$(2a)^2 = 4a^2 = d^2 - s^2, \quad s^2 = d^2 - 4a^2.$$

Auflösung. Durch Umkehrung des vorigen Ergebnisses entsteht:

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{d^2 - 4a^2} = \sqrt{4r^2 - 4a^2} \\ &= \sqrt{4(r^2 - a^2)} = 2\sqrt{r^2 - a^2} \\ &= 2\sqrt{(r+a)(r-a)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 154. Man beweise algebraisch den Satz 10 des IV. Teiles, dass die kürzeste Sehne durch einen Punkt P die auf dem Durchmesser senkrechte ist.

Auflösung. In dem Ausdruck für die Länge der Sehne:

$$s = 2\sqrt{r^2 - a^2}$$

Erkl. 251. Eine Differenz wird grösser, wenn der Subtrahend abnimmt oder der Minuend wächst. Da aber der Minuend r^2 konstant ist, so kann nur durch Veränderung des Subtrahenden die Differenz sich ändern.

wird der kleinste Wert erreicht, wenn der Minuend a^2 im Radikanden seinen grössten Wert erreicht. Dieser grösste Wert ist aber der Abstand von M nach P , also muss für die längste Sehne MP der Abstand sein, d. h. die Sehne senkrecht MP .

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 155. Man bilde Seitengrössen weiterer rechtwinkliger Dreiecke aus 16, 63, 65.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 141.

Aufgabe 156. Welche Hypotenuse hat ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten 48 und 55?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 142.

Aufgabe 157. Welche zweite Kathete hat ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse 89, Kathete 39?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 143.

Aufgabe 158. Man berechne b in einem spitzwinkligen Dreieck mit $a = 51$, $c = 41$, $p_a = 42$, $q_a = 9$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 144.

Aufgabe 159. Man berechne b in einem stumpfwinkligen Dreieck mit $a = 15$, $c = 41$, $p_c = 9,724$, $q_c = 50,724$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 145.

Aufgabe 160. Welche Winkelgattung erhält ein Dreieck mit $a = 61$, $b = 60$, c erst 10, dann 11, dann 12?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 146.

Aufgabe 161. Welche Winkelgattung hat ein Dreieck mit $a = 11$, $b = 17$, $c = 39$; $a = 47$, $b = 46$, $c = 43$; $a = 8,8$, $b = 10,5$, $c = 13,7$?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 147 und 148.

Aufgabe 162. Welche Höhe hat ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenusenabschnitten 16 und 81?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 150.

Aufgabe 163. In einem Kreise von 12 cm Radius wird im Mittelpunkt D des Radius MC die senkrechte Sehne AB errichtet. Wie lange werden die Sehnen AB und AC ?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 150 und 151.

Aufgabe 164. Man beweise algebraisch die Sätze 9 des IV. Teiles.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 152 und 154.

Aufgabe 165. Man bestätige, dass der Durchmesser die grösstmögliche Sehne ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 152 und 154.

Aufgabe 166. Wie gross ist der Radius und die Projektion der Sehne in einem Kreise, in welchem eine Sehne von der Länge $s = 20$ den Abstand $a = 3$ vom Mittelpunkt hat.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 152 und 153.

Aufgabe 167. Wie gross ist der Durchmesser und die Projektion der Sehne in einem Kreise, in welchem eine Sehne im Abstand $a = 5$ vom Mittelpunkt die Länge 1 hat?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 152 und 153.

Aufgabe 168. Warum ist es vorteilhaft, in Aufgabe 152 den Ausdruck:

$$\sqrt{d^2 - s^2},$$

dagegen in Aufgabe 153 den Ausdruck:

$$\sqrt{r^2 - a^2}$$

zu verwenden?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 154.

5) Aufgaben über Berechnung von Dreieckselementen.

(Zu Abschnitt 5).

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 169. Man berechne die Elemente eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem gegeben sind die beiden Katheten $a = 60$, $b = 91$.

Auflösung. Nach Antwort der Frage 43, 1) hat man:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 109,$$

Erkl. 252.

$$\sqrt{60^2 + 91^2} = \sqrt{3600 + 8281} = \sqrt{11881} = 109$$

$$\begin{array}{r} 188 : 20 \\ \hline 81 \end{array}$$

$$p = \frac{a^2}{c} = \frac{3600}{109} = 33,03,$$

$$q = \frac{b^2}{c} = c - p = 75,97,$$

$$F = \frac{a \cdot b}{2} = 30 \cdot 91 = 2730,$$

$$h = \frac{2F}{c} = \frac{5460}{109} = 50,09.$$

Aufgabe 170. Desgleichen, wenn gegeben
sind $a = 60$, $c = 109$.

Erkl. 252 a.

$$\sqrt{109^2 - 60^2} = \sqrt{(109 + 60)(109 - 60)}$$

$$= \sqrt{169 \cdot 49} = 13 \cdot 7 = 91.$$

Auflösung. Nach Antwort der Frage 43, 2)
ist:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = 91,$$

$$h = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{5460}{109} = 50,09,$$

$$p = \frac{a^2}{c} = 33,03,$$

$$q = 75,97,$$

$$F = \frac{c}{2} \cdot h = \frac{a \cdot b}{2} = 2730.$$

Aufgabe 171. Desgleichen, wenn gegeben
sind $a = 7,2$, $h = 4,825$.

Erkl. 253.

$$\sqrt{28,56} = 5,34$$

$$\begin{array}{r} 35 : 10 \\ \hline 56 \\ \hline 47 : 11 \end{array}$$

Sind einige Grössen berechnet, so wählt
man für die übrigen die bequemste Rechnungs-
formel.

Auflösung. Nach Antwort der Frage 43, 3)
wird:

$$p = \sqrt{a^2 - h^2} = \sqrt{51,84 - 23,28}$$

$$= \sqrt{28,56} = 5,34,$$

$$b = \frac{a \cdot h}{\sqrt{a^2 - h^2}} = \frac{7,2 \cdot 4,825}{\sqrt{7,2^2 - 4,825^2}}$$

$$= \frac{34,74}{5,34} = 6,5,$$

$$c = \frac{a^2}{p} = \frac{51,84}{5,34} = 9,7,$$

$$q = c - p = 4,36,$$

$$F = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{46,8}{2} = 23,4.$$

Aufgabe 172. Desgleichen, wenn gegeben
sind $a = 120$, $p = 100$.

Erkl. 254.

$$\sqrt{a^2 - p^2} = \sqrt{(a + p)(a - p)}$$

$$= \sqrt{(120 + 100)(120 - 100)}$$

$$= \sqrt{220 \cdot 20} = \sqrt{20 \cdot 11 \cdot 20}$$

$$= 20 \sqrt{11} = 20 \cdot 3,3166 = 66,332.$$

Ebenso:

$$\sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(144 + 120)(144 - 120)}$$

$$= \sqrt{264 \cdot 24} = \sqrt{24 \cdot 24 \cdot 11}$$

$$= 24 \cdot \sqrt{11} = 24 \cdot 3,3166 = 79,598.$$

Auflösung. Nach Antwort der Frage 43, 4)
entsteht:

$$c = \frac{a^2}{p} = \frac{14400}{100} = 144,$$

$$h = \sqrt{a^2 - p^2} = \sqrt{220 \cdot 20} = 20 \sqrt{11}$$

$$= 66,332,$$

$$q = \frac{h^2}{p} = \frac{4400}{100} = 44 = c - p,$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{264 \cdot 24} = 24 \sqrt{11}$$

$$= 79,598,$$

$$F = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{95548}{2} = 4275,9.$$

Aufgabe 173. Desgleichen, wenn gegeben sind $h = 6$, $p = 3$.

Auflösung. Nach Antwort der Frage 43, 5) wird:

$$q = \frac{h^2}{p} = \frac{36}{3} = 12,$$

$$c = p + q = 15,$$

$$F = \frac{c \cdot h}{2} = 45,$$

$$a = \sqrt{h^2 + p^2} = \sqrt{45} = 6,71,$$

$$b = \sqrt{h^2 + q^2} = \sqrt{180} = 13,42.$$

Aufgabe 174. Desgleichen, wenn gegeben sind $p = 10$, $q = 2,5$.

Auflösung. Nach Antwort der Frage 43, 6) wird:

$$h = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{25} = 5,$$

$$c = p + q = 12,5,$$

$$F = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{125}{4} = 31,25,$$

$$a = \sqrt{p \cdot c} = \sqrt{125} = 11,18,$$

$$b = \sqrt{q \cdot c} = \sqrt{12,5 \cdot 2,5} \\ = \sqrt{25 \cdot 25 \cdot 0,05} = 2,5 \sqrt{5} = 5,590.$$

Aufgabe 175. Desgleichen, wenn gegeben sind $a = 6$, $q = 7,6$.

Auflösung. Da $b^2 = c \cdot q$, also:

$$c = \frac{b^2}{q} \text{ und } c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ist, so besteht eine quadratische Gleichung für b , wenn man setzt:

$$\frac{b^2}{q} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

also:

$$b^4 = q^2 (a^2 + b^2), \quad b^4 - b^2 q^2 - a^2 q^2 = 0,$$

$$b^2 = \frac{q^2}{2} \pm \sqrt{\frac{q^4}{4} + a^2 q^2}$$

$$= \frac{q}{2} (q + \sqrt{q^2 + 4a^2}),$$

oder in Ziffern:

$$b^2 = 3,8 (7,6 + \sqrt{7,6^2 + 4 \cdot 36}) \\ = 3,8 (7,6 + 14,2) = 82,8,$$

also $b = 9,1$. Dann wird:

$$c = \frac{b^2}{q} = \frac{82,8}{7,6} = 10,9;$$

und endlich:

$$q = c - q = 3,3,$$

$$h = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{25} = 5,$$

$$F = \frac{c \cdot h}{2} = 27,3.$$

Erkl. 255. Man könnte auch rechnen:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c + a)(c - a)} \\ = \sqrt{23,68 \cdot 1,32} = \sqrt{31,2576} = 5,5903.$$

Erkl. 256. Ebenso wie:

$$b^2 = \frac{q}{2} (q + \sqrt{q^2 + 4a^2}),$$

erhält man symmetrisch auch:

$$a^2 = \frac{p}{2} (p + \sqrt{p^2 + 4b^2}),$$

indem p und q vertauscht werden. Das negative Zeichen der Wurzel hat für das rechtwinklige Dreieck keine praktische Bedeutung. Man erkennt leicht, dass das nebenstehend berechnete Dreieck dasselbe ist, wie in Aufgabe 169.

Aufgabe 176. Desgleichen, wenn gegeben sind $c = 13$, $h = 6$.

Erkl. 257. In so einfachen Fällen, wie der vorliegende, kann man auch unschwer erraten, dass $c = 13 = 9 + 4$, $h^2 = 36 = 9 \cdot 4$, also p und q gleich 9 und 4 sind. Es ist sodann vollständig symmetrisch, ob $p = 9$, $q = 4$ oder $p = 4$, $q = 9$ gesetzt wird.

Auflösung. Man kennt $p \cdot q = h^2$ und $p + q = c$, kann also p und q berechnen als Wurzeln einer quadratischen Gleichung:

$$x^2 - cx + h^2 = 0,$$

nämlich $p = 9$, $q = 4$. Sodann ist:

$$a = \sqrt{h^2 + p^2} = \sqrt{117} = 10,82,$$

$$b = \sqrt{h^2 + q^2} = \sqrt{52} = 7,21,$$

$$F = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{78}{2} = 39.$$

Aufgabe 177. Desgleichen, wenn gegeben $F = 39$, $c = 13$.

Erkl. 258. Dasselbe wäre die Aufgabe mit gegebenen Stücken F und h , wodurch c , oder F und a , wodurch b , oder F und b , wodurch a sofort gefunden wäre.

Auflösung. Aus $F = \frac{ch}{2}$ folgt sofort:

$$h = \frac{2F}{c} = \frac{2 \cdot 39}{13} = 6,$$

wodurch die vorige Aufgabe hergestellt ist mit c und h als gegebenen Stücken.

Aufgabe 178. Welches sind die sämtlichen möglichen Aufgabengruppen aus den 7 Stücken $abchpqF$, und wie sind sie in den Aufgaben 169 bis 177 vertreten?

Auflösung. Aus den 7 Stücken $abchpqF$ kann man folgende 21 Gruppen zu dreien bilden:

$ab : 169$	$bc : 170$	$ch : 176$	$hp : 173$	$pq : 174$	$qF : -$
$ac : 170$	$bh : 171$	$cp : 174$	$hq : 173$	$pF : -$	
$ah : 171$	$bp : 175$	$cq : 174$	$hF : 177$		
$ap : 172$	$bq : 172$	$cF : 177$			
$aq : 175$	$bF : 177$				
$aF : 177$					

Erkl. 259. Die einzig nicht gelösten Gruppen pF oder qF lassen sich nicht mittels quadratischer Gleichungen lösen, sondern führen auf Gleichungen dritten Grades für a , b , c , h bzw. q oder p , sind also nicht elementar lösbar.

Aufgabe 179. Man berechne die Elemente eines schiefwinkligen Dreiecks, wenn gegeben sind die drei Seiten $a = 51$, $b = 52$, $c = 53$.

Erkl. 260. Man überzeugt sich zunächst, dass das Dreieck ein spitzwinkliges ist, also überall gleiche Zeichen eintreten. Sodann sind die Formeln für p und q in der Art übersichtlich,

1) dass im Nenner die Seite steht, deren Abschnitt gesucht wird, und

2) dass im Zähler negativ nur diejenige Seite steht, welcher der gesuchte Abschnitt nicht anstösst, d. h. deren Projektion nicht gesucht wird.

Auflösung. Nach dem allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz erhält man [siehe Antwort der Frage 44, 1)]:

$$q_c = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}, \quad p_b = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b};$$

$$q_a = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}, \quad p_c = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c};$$

$$q_b = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}, \quad p_a = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Demnach wird:

$$p_a = \frac{2496}{102} = 24,47; \quad p_b = \frac{2912}{104} = 28;$$

$$q_a = \frac{2706}{102} = 26,53; \quad q_b = \frac{2496}{104} = 24;$$

Erkl. 261. Es ist stets ratsam, die Berechnung der Grössen nach einer gleichmässigen Methode für alle drei entsprechenden durchzuführen, um nachträglich an andern Sätzen Prüfung bzw. Bestätigung des gefundenen zu erhalten, z. B. $a < b < c$, folglich $h_a > h_b > h_c$ und anderes.

$$p_c = \frac{2706}{106} = 25,53;$$

$$q_c = \frac{2912}{106} = 27,47.$$

Und hieraus wird dann:

$$h_a = \sqrt{b^2 - p_a^2} = \sqrt{c^2 - q_a^2} = \sqrt{2106} = 45,89,$$

$$h_b = \sqrt{c^2 - p_b^2} = \sqrt{a^2 - q_b^2} = \sqrt{2025} = 45,$$

$$h_c = \sqrt{a^2 - p_c^2} = \sqrt{b^2 - q_c^2} = \sqrt{1949} = 44,15,$$

$$F = \frac{b h_b}{2} = 1170.$$

Andere Rechnungsweisen für die p und q wären die Gleichheiten des Satzes 11:

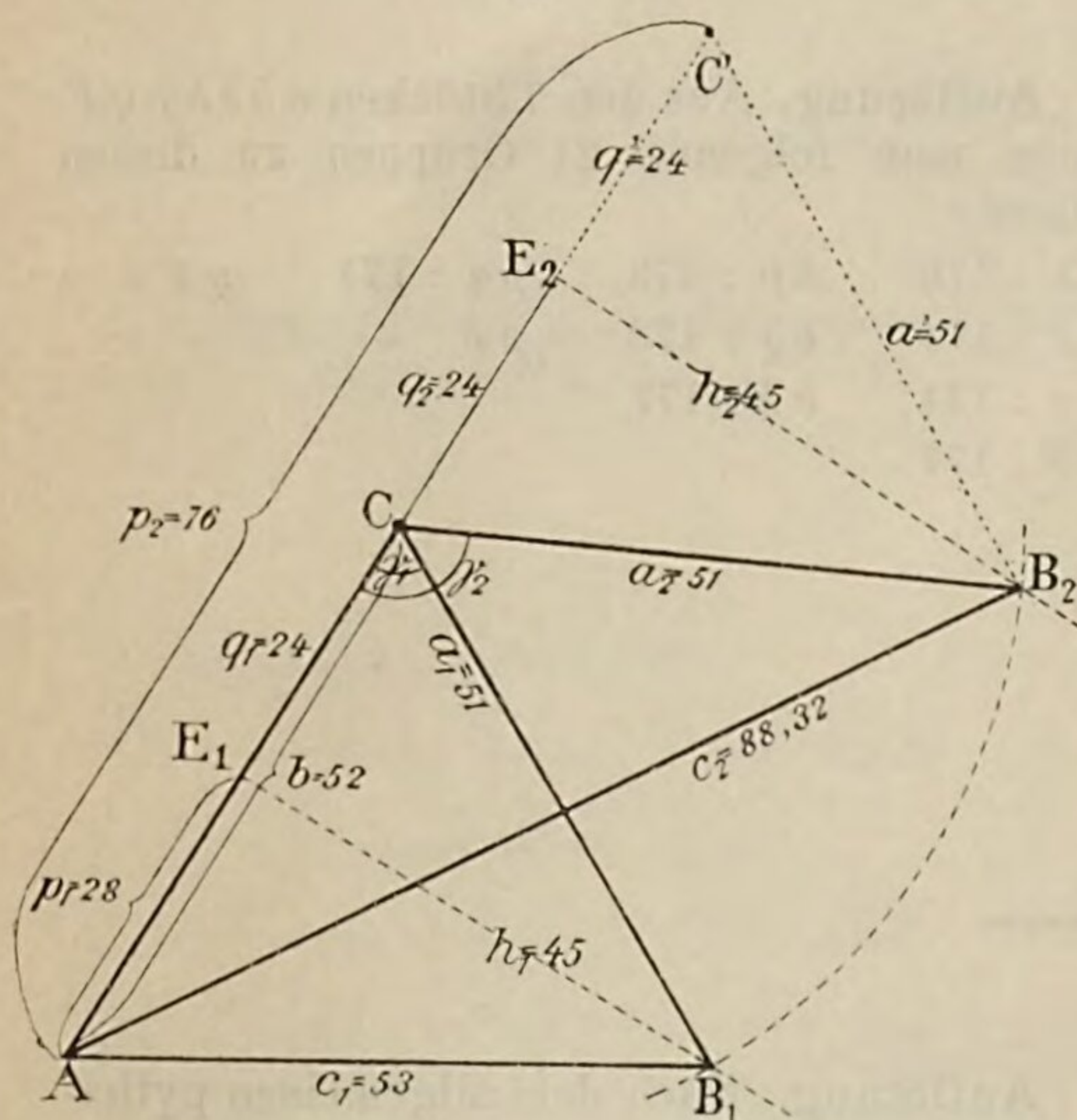
$$c q_c = b p_b, a q_a = c p_c, b q_b = a p_a;$$

für die Höhen auch der Satz:

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

Aufgabe 180. Desgleichen, wenn gegeben sind $a = 51$, $b = 52$, $q_b = 24$.

Figur 76.



Erkl. 262. Die nebenstehende Aufgabe ist ein treffliches Beispiel dafür, wie eine zweifache Lösung durch Konstruktion bei algebraischer Ausrechnung durch das verschiedene Vorzeichen dargestellt wird. Trägt man nämlich die Projektion q_b vom Punkte C nach innen ab, als CE_1 , so liefert die Höhe $E_1 B_1$ das spitzwinklige Dreieck $AB_1 C$, trägt man aber die Projektion q_b vom Punkte C nach aussen ab, als CE_2 , so liefert die Höhe $E_2 B_2$, das stumpfwinklige Dreieck $AB_2 C$. Denn die konstante Länge $a = 51$ muss von C ausgehen, wird also mittels Kreisbogen um C abgetragen entweder nach h_1 oder nach h_2 . Im ersten Falle wird γ spitz, im andern Falle wird γ stumpf.

Auflösung. Man hat zunächst:

$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2b q_b = \sqrt{5305 \pm 2496}.$$

Also ist das c_1 gegenüber einem spitzen Winkel γ gleich $\sqrt{2809} = 53$, dagegen das c_2 gegenüber einem stumpfen Winkel γ gleich $\sqrt{7801} = 88,32$. Dann kennt man alle drei Seiten, und die Aufgabe ist auf die vorige zurückgeführt. Man erhält also für $AB_1 C$ dieselben Werte wie oben in Aufgabe 179, dagegen für $AB_2 C$:

$q_b = 24$, $p_b = b + q_b = 76$; $h_a = 45,89$, $h_b = 45$ und

$$p_a = 24,47, F = 1170.$$

Dagegen abweichend:

$$q_c = \frac{b}{c} p_b = \frac{52 \cdot 76}{88,32} = 44,74,$$

also:

$$p_c = c - q_c = 43,58, q_a = a + p_a = 75,47.$$

Weiter wird gefunden:

$$h_a : h_b : b : a, h_c = \frac{b h_b}{c} = \frac{52 \cdot 45}{88,32} = 26,5.$$

Dass nämlich die Ausdrücke h_a (und p_a für $AB_1 C$ und $AB_2 C$ dieselben sein müssen, folgt aus der Gleichheit der Winkel:

$$B_2 C E_2 = B_1 C E_1.$$

Dadurch wird dann auch der Winkel:

$$(b p_a)_1 = 180^\circ - \gamma_2 = \gamma_1,$$

also:

$$\triangle (b h_a p_a)_1 \cong \triangle (a h_a p_a)_2.$$

NB. In Fig. 76 ist die Klammer für $p_2 = 76$ irrtümlich bis C' statt nur bis E_2 gezogen.

Aufgabe 181. Desgleichen, wenn gegeben sind $a = 51$, $b = 52$, $h_b = 45$.

Auflösung. Man findet zuerst:

$$q_b = \sqrt{a^2 - h_b^2} = \sqrt{96 \cdot 6} = \sqrt{16 \cdot 36} = 4 \cdot 6 = 24,$$

dann zweierlei p_b , entweder $b - q_b$ oder $b + q_b$, und hat so dieselben Grössen, wie in voriger Aufgabe.

Aufgabe 182. Desgleichen, wenn gegeben sind $a = 51$, $p_b = 76$, $q_b = 24$.

Auflösung. Es wird b entweder:

$$p_b + q_b = 100 \text{ oder } p_b - q_b = 52.$$

Erkl. 263. Dass in dem Dreieck AB_2C' der Winkel $\beta' = \angle AB_2C'$ ein spitzer sein muss, geht daraus hervor, dass:

$$a^2 + c^2 = 51^2 + 88,32^2 = 2601 + 7800 = 10401,$$

also grösser ist als $b^2 = 100^2 = 10000$.

Man hat also wieder dieselben Stücke wie in Aufgabe 180, und zwei Lösungen: mit spitzem oder stumpfem Winkel γ . Die erstere ist $\triangle AB_2C$ in Figur 76, die andere ist das daselbst angedeutete Dreieck AB_2C' mit:

$$a' = B_2C' = B_2C = 51, \quad b' = AC' = 100, \\ c = AB_2 = 88,32.$$

Aufgabe 183. Desgleichen, wenn gegeben sind $h_b = 45$, $p_b = 76$, $q_b = 24$.

Auflösung. Wieder erhält man:

$$a = \sqrt{h_b^2 + q_b^2} = 51, \quad c = \sqrt{h_b^2 + p_b^2} = 88,32, \\ b = p \pm q,$$

also entweder $b = 52$ oder $b' = 100$, wie in Figur 76 und den vorigen Aufgaben.

Aufgabe 184. Desgleichen, wenn gegeben sind $b = 52$, $c = 53$, $q_b = 24$.

Erkl. 264. Diese Aufgabe unterscheidet sich von Aufgabe 180 dadurch, dass dort gegeben sind die zwei Seiten a und b und die Projektion von deren einer auf die andere, während in der vorliegenden Aufgabe gegeben sind die zwei Seiten b und c und die Projektion der dritten Seite a auf die eine der beiden gegebenen.

Auflösung. Nach dem allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz wird unmittelbar gefunden:

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2bq_b,$$

also die darin unbekannte Grösse:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2 \pm 2bq_b} = \sqrt{105 \pm 2496}.$$

Man kann also nur die eine Lösung mit $+$ in der Wurzel, also mit $-$ in der allgemeinen Formel gebrauchen, und erhält $a = \sqrt{2601} = 51$, also das in Figur 76 und Aufgabe 179 behandelte Dreieck.

Aufgabe 185. Desgleichen, wenn gegeben sind $a = 51$, $c = 88,32$, $q_b = 24$.

Erkl. 265. Die Konstruktion zeigt leicht, dass zweierlei Dreiecke entstehen können. Wenn bei der Rechnung, wie nebenstehend, die Vorzeichen so verschieden sind, dass negative Werte für Seitenstrecken entstehen, so werden diese weggelassen, weil sie zwar den ziffermässigen Bedingungen der Gleichung entsprechen, nicht aber den thatsächlichen Verhältnissen, welche durch dieselbe Gleichung ihren Ausdruck finden.

Auflösung. Man benützt die allgemeine Formel, wie oben:

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2bq_b,$$

worin b allein unbekannt ist. Man erhält also die quadratische Gleichung für b :

$$b^2 \mp 2bq_b + (a^2 - c^2) = 0,$$

also:

$$b = \pm q_b \pm \sqrt{q_b^2 - (a^2 - c^2)}$$

und in Ziffern:

$$b = \pm 24 \pm \sqrt{24^2 - 51^2 + 88,32^2} = \pm 24 \pm 76, \\ \text{also } b = -24 + 76 = 52 \text{ oder } b' = 100. \\ \text{Dies sind wieder die in Figur 76 und Aufgabe 182 behandelten beiden Dreiecke.}$$

Aufgabe 186. Desgleichen, wenn gegeben sind eine Seite und die beiden andern Höhen.

Auflösung. Ist gegeben c, h_a, h_b , so kann man zunächst berechnen:

$$p_b = \sqrt{c^2 - h_b^2} \text{ und } q_a = \sqrt{c^2 - h_a^2}.$$

Ferner erhält man für die Strecken a und b die Gleichung $a h_b = b h_a$, also $b = \frac{a h_b}{h_a}$; und endlich kann man setzen:

$$b^2 = h_a^2 + p_a^2 = h_a^2 + (a - q_a)^2.$$

Setzt man hierin für b den Wert von zuvor, so hat man eine quadratische Gleichung für a :

$$a^2 \cdot \left(\frac{h_a}{h_b}\right)^2 = h_a^2 + (a - q_a)^2 = h_a^2 + a^2 - 2 a q_a + q_a^2.$$

Also:

$$a^2 \left(\frac{h_a^2}{h_b^2} - 1\right) + 2 a q_a - (h_a^2 + q_a^2) = 0.$$

Ist hieraus die Strecke a bestimmt, so kennt man auch $b = \frac{a h_b}{h_a}$, also alle Stücke des Dreiecks.

Erkl. 266. Die Lösung der nebenstehenden quadratischen Gleichung wird gefunden aus der umgeformten Gleichung:

$$a^2 + 2 a \cdot \frac{h_b^2 q_a}{h_a^2 - h_b^2} - \frac{h_a^2 + q_a^2}{h_a^2 - h_b^2} \cdot h_b^2 = 0,$$

oder da $c^2 = h_a^2 + q_a^2$:

$$a^2 + 2 a \cdot \frac{h_b^2 q_a}{h_a^2 - h_b^2} - \frac{c^2 h_b^2}{h_a^2 - h_b^2} = 0$$

und mit Zeichenänderung im Nenner:

$$\begin{aligned} a &= \frac{h_b^2 q_a}{h_b^2 - h_a^2} \pm \sqrt{\frac{h_b^4 q_a^2 - c^2 h_b^2 (h_b^2 - h_a^2)}{(h_b^2 - h_a^2)^2}} = \frac{1}{h_b^2 - h_a^2} \{h_b^2 q_a \pm \sqrt{h_b^4 q_a^2 - c^2 h_b^4 + c^2 h_a^2 h_b^2}\} \\ &= \frac{1}{h_b^2 - h_a^2} \{h_b^2 q_a \pm \sqrt{h_a^2 h_b^2 \cdot c^2 - h_b^4 \cdot h_a^2}\} = \frac{h_b}{h_b^2 - h_a^2} \{h_b q_a \pm \sqrt{h_a^2 \cdot p_b^2}\} \\ &= \frac{h_b}{h_b^2 - h_a^2} (h_b q_a \pm h_a p_b). \end{aligned}$$

Die beiderlei Vorzeichen geben wieder die beiderlei Lösungen, da man aus c, h_a, h_b auch zweierlei Dreiecke konstruieren kann.

Aufgabe 187. Man berechne die Höhen eines Dreiecks mit den Seiten $a = 51, b = 52, c = 53$ unmittelbar aus den Seiten.

Auflösung. Zur Auflösung nach der Formel:

$$h_a = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

bildet man:

Erkl. 267. Wird nur eine einzelne Höhe, z. B. h_b gesucht, dann kann man kürzer rechnen:

$$\begin{aligned} h_b &= \frac{2}{52} \cdot \sqrt{78 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} = \sqrt{\frac{3 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{26 \cdot 26}} \\ &= \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 25} = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} a & = & 51 \\ b & = & 52 \\ c & = & 53 \end{array}$$

$$a + b + c = 2s = 156$$

$$\frac{a + b + c}{2} = s = 78$$

$$s - a = 27$$

$$s - b = 26$$

$$s - c = 25$$

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{78 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} = \sqrt{3 \cdot 26 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 26 \cdot 25} = 3 \cdot 26 \cdot 3 \cdot 5 = 26 \cdot 45.$$

Also:

$$h_a = \frac{2}{a} \cdot 26 \cdot 45 = \frac{2}{51} \cdot 26 \cdot 45 = 45,88,$$

$$h_b = \frac{2}{b} \cdot 26 \cdot 45 = \frac{2}{52} \cdot 26 \cdot 45 = 45,$$

$$h_c = \frac{2}{c} \cdot 26 \cdot 45 = \frac{2}{53} \cdot 26 \cdot 45 = 44,15.$$

Erkl. 268. Nach der Formel ohne die Grösse s , in der a , b und c beibehalten werden, entsteht ein wenig umständlicher:

$$\begin{aligned} h_b &= \frac{1}{2b} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \frac{1}{2 \cdot 52} \cdot \sqrt{156 \cdot 54 \cdot 52 \cdot 50} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 52} \cdot \sqrt{3 \cdot 52 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 52 \cdot 2 \cdot 25} = \frac{1}{2} \sqrt{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 25} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 25} = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45. \end{aligned}$$

Bei der Rechnung mit der Grösse s erhält man also gerade nur halb so grosse Zahlen und dadurch einfachere Rechnung.

Aufgabe 188. Man berechne die Fläche eines Dreiecks mit den Seiten $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ unmittelbar aus den drei Seiten.

Auflösung. Um zu bilden:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

setzt man:

$$\begin{array}{r} a = 13 \\ b = 14 \\ c = 15 \\ \hline 2s = 42 \\ s = 21 \\ \hline s-a = 8 \\ s-b = 7 \\ s-c = 6 \end{array}$$

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84. \end{aligned}$$

Erkl. 269. Die Rechnung ohne s liefert:

$$\begin{array}{r} a+b+c = 42 \\ -a+b+c = 16 \\ a-b+c = 14 \\ a+b-c = 12 \end{array}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \frac{1}{4} \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{3 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 4} = \sqrt{3 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 4} = 3 \cdot 14 \cdot 2 = 84. \end{aligned}$$

Aufgabe 189. Man berechne die Radien der vier Berührungskreise des in voriger Aufgabe gegebenen Dreiecks.

Erkl. 270. Man bestätigt leicht die übrigen Beziehungen, in Antwort der Frage 47 und Erkl. 113 z. B.:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} &= \frac{1}{10,5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} \\ &= \frac{8+7+6}{84} = \frac{21}{84} = \frac{1}{4} = \frac{1}{\rho_0} \end{aligned}$$

und die übrigen.

Auflösung. Da man hat:

$$\rho_0 = \frac{F}{s}, \quad \rho_a = \frac{F}{s-a} \text{ u. s. w.}$$

so wird:

$$\rho_0 = \frac{84}{21} = 4, \quad \rho_a = \frac{84}{8} = 10,5,$$

$$\rho_b = \frac{84}{7} = 12, \quad \rho_c = \frac{84}{6} = 14.$$

Aufgabe 190. Man soll mittels der in Antwort der Frage 47 und Erkl. 113 aufgeführten Beziehungen nachweisen, dass zwischen den Seiten, Höhen und Berührungsradien und mit dem Flächeninhalt folgende Formeln bestehen:

$$1) \frac{\varrho_a \varrho_b \varrho_c}{\varrho_a \varrho_b + \varrho_b \varrho_c + \varrho_c \varrho_a} = \varrho_0,$$

$$2) \frac{\varrho_0 \varrho_b \varrho_c}{\varrho_b \varrho_c - \varrho_0 (\varrho_b + \varrho_c)} = \varrho_a,$$

$$3) (h_a + h_b + h_c) \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) = (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right),$$

$$4) \frac{h_a^2}{h_b h_c} + \frac{h_b^2}{h_c h_a} + \frac{h_c^2}{h_a h_b} = \frac{b c}{a^2} + \frac{c a}{b^2} + \frac{a b}{c^2},$$

$$5) F = \frac{\varrho_a \varrho_b \varrho_c}{\sqrt{\varrho_a \varrho_b + \varrho_b \varrho_c + \varrho_c \varrho_a}},$$

$$6) F = \frac{\varrho_0 \varrho_b \varrho_c}{\sqrt{\varrho_b \varrho_c - \varrho_0 (\varrho_b + \varrho_c)}},$$

$$7) F = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) \left(-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) \left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \right)}}$$

Erkl. 271. Es können die Werte im Nenner der Formel 2) mit ihren entsprechenden einzeln zusammengestellt werden in der symmetrischen Form:

$$\varrho_b \varrho_c - \varrho_0 (\varrho_b + \varrho_c) = (s - a)^2$$

$$\varrho_c \varrho_a - \varrho_0 (\varrho_c + \varrho_a) = (s - b)^2$$

$$\varrho_a \varrho_b - \varrho_0 (\varrho_a + \varrho_b) = (s - c)^2$$

Dieselben gehen aus einander hervor durch cyklische Vertauschung der Buchstaben, während im Nenner der Formel 1) durch cyklische Vertauschung nur immer wieder derselbe Wert entsteht:

$$\varrho_a \varrho_b + \varrho_b \varrho_c + \varrho_c \varrho_a =$$

$$\varrho_b \varrho_c + \varrho_c \varrho_a + \varrho_a \varrho_b =$$

$$\varrho_c \varrho_a + \varrho_a \varrho_b + \varrho_b \varrho_c.$$

$$s(s - a) - (s - a)(s - c) - (s - a)(s - b) = (s - a)(s - s + c - s + b) = (s - a)(b + c - s)$$

Nun ist:

$$b + c + a = 2s, \text{ also } b + c = 2s - a,$$

und obiger Nenner wird:

$$(s - a)(2s - a - s) = (s - a)^2.$$

Daher ist:

$$\frac{\varrho_0 \varrho_b \varrho_c}{\varrho_b \varrho_c - \varrho_0 \varrho_b - \varrho_0 \varrho_c} = \frac{F(s - a)}{(s - a)^2} = \frac{F}{s - a},$$

und dies ist der Wert für ϱ_a .

B. Beweis der Formeln 3) und 4).

Man hat nach Antwort der Frage 47 die Werte:

$$h_a = \frac{2}{a} \varrho_0 s, \quad h_b = \frac{2}{b} \varrho_0 s, \quad h_c = \frac{2}{c} \varrho_0 s;$$

also wird:

$$h_a + h_b + h_c = 2 \varrho_0 s \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Ferner ist aber nach Antwort der Frage 47 auch:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\varrho_0};$$

Erkl. 272. Wie in Erkl. 271 die Nenner der Formel 2) in dreifacher Gestalt auftreten, erhält man auch die drei symmetrischen Formeln:

$$\varrho_a = \frac{\varrho_0 \varrho_b \varrho_c}{\varrho_b \varrho_c - \varrho_0 (\varrho_b + \varrho_c)},$$

$$\varrho_b = \frac{\varrho_0 \varrho_c \varrho_a}{\varrho_c \varrho_a - \varrho_0 (\varrho_c + \varrho_a)},$$

$$\varrho_c = \frac{\varrho_0 \varrho_a \varrho_b}{\varrho_a \varrho_b - \varrho_0 (\varrho_a + \varrho_b)}.$$

also entsteht durch Multiplikation:

$$\frac{1}{\varrho_0} \cdot 2\varrho_0 s \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 2s \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Wird aus denselben Werten von h_a, h_b, h_c der Ausdruck in Formel 4) gebildet, so entsteht:

$$h_a^2 = \left(\frac{2}{a} \varrho_0 s \right)^2 = \frac{1}{a^2} \cdot (2\varrho_0 s)^2;$$

und

$$h_b h_c = \frac{2}{b} \varrho_0 s \cdot \frac{2}{c} \varrho_0 s = \frac{1}{bc} (2\varrho_0 s)^2,$$

folglich durch Division:

$$\frac{h_a^2}{h_b h_c} = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{bc} = \frac{bc}{a^2}.$$

Ebenso erhält man die beiden andern Posten in Formel 4).

C. Beweis der Formeln 5) und 6).

Nach dem Beweis A für die Formeln 1) und 2) ist der Zähler in Formel 5) gleich $s^2 \cdot \varrho_0$, der Nenner gleich $\sqrt{s^2} = s$, also der Bruch gleich $\frac{s^2 \cdot \varrho_0}{s} = s \cdot \varrho_0$. Dies ist aber der Wert für F .

Ebenso findet man, dass der Zähler des Bruches in Formel 6) gleich ist $F(s-a)$, dagegen der Nenner gleich $\sqrt{(s-a)^2} = s-a$, also entsteht durch Division unmittelbar F , wie in Formel 6).

D. Beweis der Formel 7).

Unter Benützung der Werte in Antwort der Frage 47, 1) erhält man für die vier Faktoren im Nenner der Wurzel der Reihe nach die Werte $\frac{1}{\varrho_0}, \frac{1}{\varrho_a}, \frac{1}{\varrho_b}, \frac{1}{\varrho_c}$, also für den ganzen Ausdruck den Wert:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varrho_0} \cdot \frac{1}{\varrho_a} \cdot \frac{1}{\varrho_b} \cdot \frac{1}{\varrho_c}}} = \sqrt{\varrho_0 \varrho_a \varrho_b \varrho_c}.$$

Nun ist nach Erkl. 113 $\varrho_0 \varrho_a \varrho_b \varrho_c = F \cdot F$, also $\sqrt{\varrho_0 \varrho_a \varrho_b \varrho_c} = F$, wodurch Formel 7) bewiesen ist (vergl. Erkl. 118).

Erkl. 273. Zu der Formel 3) lassen sich unschwer Gruppen mit cyklischer Vertauschung bilden, nämlich:

$$(h_a + h_b + h_c) \left(-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) = (-a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right),$$

$$(h_a + h_b + h_c) \left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) = (a - b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right),$$

$$(h_a + h_b + h_c) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \right) = (a + b - c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right);$$

und

$$(-h_a + h_b + h_c) \left(-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) = (-a + b + c) \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right),$$

$$(-h_a + h_b + h_c) \left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) = (a - b + c) \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right),$$

$$(-h_a + h_b + h_c) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \right) = (a + b - c) \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

und zwei weitere entsprechende Gruppen mit je dreimal links $(h_a - h_b + h_c)$ und rechts $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ bzw. links $(h_a + h_b - h_c)$ und rechts $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)$.

Erkl. 274. Formel 6) ist eine aus der cyklischen Gruppe:

$$F = \frac{\varrho_0 \varrho_b \varrho_c}{\sqrt{\varrho_b \varrho_c - \varrho_0 (\varrho_b + \varrho_c)}} = \frac{\varrho_0 \varrho_c \varrho_a}{\sqrt{\varrho_c \varrho_a - \varrho_0 (\varrho_c + \varrho_a)}} = \frac{\varrho_0 \varrho_a \varrho_b}{\sqrt{\varrho_a \varrho_b - \varrho_0 (\varrho_a + \varrho_b)}}.$$

Aufgabe 191. Man soll nachweisen, dass für die Entfernungen e_0, e_a, e_b, e_c zwischen dem Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks und den vier Mittelpunkten der In- und Ankreise mit den Radien $r, \varrho_0, \varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ folgende Beziehungen bestehen:

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt, darthun:

- 1) $e_0^2 = r(r - 2\rho_0)$,
- 2) $e_a^2 = r(r + 2\rho_a)$, $e_b^2 = r(r + 2\rho_b)$,
 $e_c^2 = r(r + \rho_c)$,
- 3) $e_0^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 = 12r^2$.

Erkl. 275. Nach Antwort der Frage 66 des vierten Teiles sind die Tangentenabschnitte vom Dreieckspunkt an den Inkreis gleich der halben Seitensumme minus Gegenseite, die Tangentenabschnitte vom Dreieckspunkt an den nicht zugehörigen Ankreis gleich halber Seitensumme minus der andern anstossenden Seite.

A. Beweis der Formel 1.

Verbindet man in Figur 77 die Punkte M_0 und O , so wird $OM_0 = e_0$. Dann ist $M_0E \perp AC$ gleich ρ_0 , $OD \perp AC$ gleich n_b . Zieht man nun zu M_0O die Parallele EK , so ist $EK = M_0O = e_0$; und EK ist Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreiecke EDK , von dem die Katheten angebbare Werte haben. Es ist nämlich $DE = CE - CD$, worin CE als Tangentenabschnitt von C an den Inkreis gleich $s - c$, CD als Seitenhälfte gleich $\frac{b}{2}$, also:

$$DE = s - c - \frac{b}{2} = \frac{a - c}{2}.$$

Ferner ist:

$$DK = DO - KO = DO - M_0E = n_b - \rho_0,$$

worin wieder (siehe Erkl. 276):

$$n_b = r + \frac{\rho_0 - \rho_b}{2}, \text{ während } n_b^2 = r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

ist. Nun ist:

$$e_0^2 = EK^2 = DE^2 + DK^2 = \left(\frac{a - c}{2}\right)^2 + (n_b - \rho_0)^2$$

oder:

$$\begin{aligned} e_0^2 &= \left(\frac{a - c}{2}\right)^2 + n_b^2 - 2 \cdot n_b \cdot \rho_0 + \rho_0^2 \\ &= \left(\frac{a - c}{2}\right)^2 + r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\rho_0 \left(r + \frac{\rho_0 - \rho_b}{2}\right) + \rho_0^2 \\ &= \frac{(a - c)^2 - b^2}{4} + r^2 - 2\rho_0 \cdot r - \rho_0(\rho_0 - \rho_b) + \rho_0^2 \\ &= \frac{(a - c + b)(a - c - b)}{4} + r^2 - 2r\rho_0 - \rho_0^2 + \rho_0\rho_b + \rho_0^2 \\ &= -(s - c)(s - a) + r^2 - 2r\rho_0 + \rho_0\rho_b, \text{ also nach Erkl. 277:} \\ &= r^2 - 2r\rho_0 = r(r - 2\rho_0). \end{aligned}$$

B. Beweis der Formeln 2).

Erkl. 275a. Man beachte, dass jedes e schon durch zwei Bestimmungsstücke festgelegt ist, dass also nicht etwa r , ρ_0 , e_0 als drei Bestimmungsstücke eines Dreiecks gelten können. Denn nicht jedes Kreispaar mit Radien r und ρ_0 und beliebigem e_0 lässt ein Dreieck zu, das dem ersten Kreise ein-, dem zweiten umgeschrieben ist. Vielmehr ist durch r und je eines der ρ oder e das zugehörige e oder ρ bestimmt und umgekehrt r durch ein einzelnes Paar e und ρ .

Verbindet man in Figur 77 die Punkte M_c und O , so wird $OM_c = e_c$. Dann ist $M_cF \perp CA$ gleich ρ_c , OD wieder gleich n_b . Zieht man nun zu M_cO wieder die Parallele DL , so ist $DL = M_cO = e_c$, und:

$$DL^2 = DF^2 + FL^2.$$

Darin ist aber:

$$DF = DA + AF = \frac{b}{2} + (s - b) = \frac{a + c}{2}$$

und

$$FL = FM_c - LM_c = FM_c - DO = \rho_c - n_b.$$

Folglich wird:

$$\begin{aligned} DL^2 = e_c^2 &= \left(\frac{a + c}{2}\right)^2 + (\rho_c - n_b)^2 \\ &= \left(\frac{a + c}{2}\right)^2 + \rho_c^2 - 2\rho_c \cdot n_b + n_b^2 \\ &= \left(\frac{a + c}{2}\right)^2 + \rho_c^2 - 2\rho_c \left(r + \frac{\rho_0 - \rho_b}{2}\right) + r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(a+c)^2 - b^2}{4} + \varrho_c^2 - 2\varrho_c \cdot r - \varrho_c(\varrho_0 - \varrho_b) + r^2 \\
 &= \frac{(a+c+b)(a+c-b)}{4} + \varrho_c^2 - 2\varrho_c r - \varrho_c \varrho_0 + \varrho_c \varrho_b + r^2 \\
 &= s(s-b) + \varrho_c(\varrho_c - \varrho_0 + \varrho_b) - 2\varrho_c r + r^2 \\
 &= r^2 - 2r\varrho_c + \varrho_a \cdot \varrho_c + \varrho_c(\varrho_c - \varrho_0 + \varrho_b) \\
 &= r^2 - 2r\varrho_c + \varrho_c(\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho_0) \\
 &= r^2 - 2r\varrho_c + \varrho_c \cdot 4r = r^2 + 2r\varrho_c = r(r + 2\varrho_c).
 \end{aligned}$$

Ebenso erhält man die symmetrischen Formeln.

C. Beweis der Formel 3).

Durch Addition der vier Formeln in 1) und 2) erhält man:

$$\begin{aligned}
 e_0^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 &= r(r - 2\varrho_0 + r + 2\varrho_a + r + 2\varrho_b + r + 2\varrho_c) \\
 &= r[4r + 2(\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho_0)] \\
 &= r(4r + 2 \cdot 4r) = r \cdot 12r = 12r^2.
 \end{aligned}$$

Erkl. 276. In Erkl. 389 des IV. Teils war bewiesen, dass:

$$n_a + n_b + n_c = r + \varrho_0,$$

und

$$n_a + n_b = \frac{\varrho_0 + \varrho_c}{2}, \quad n_b + n_c = \frac{\varrho_0 + \varrho_a}{2},$$

$$n_c + n_a = \frac{\varrho_0 + \varrho_b}{2};$$

daraus erhält man mittels Subtraktion von der obern Gleichung:

$$n_c = r + \frac{\varrho_0 - \varrho_c}{2}, \quad n_a = r + \frac{\varrho_0 - \varrho_a}{2},$$

$$n_b = r + \frac{\varrho_0 - \varrho_b}{2}.$$

Jedes n aber bildet mit der zugehörigen Seitenhälfte und einem Radius r ein rechtwinkliges Dreieck, worin r Hypotenuse, n und Seitenhälfte Katheten sind.

Erkl. 277. In derselben Erkl. 389 des IV. Teils ist auch nachgewiesen die Gleichheit:

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho_0 = 4r.$$

Und aus Erkl. 113 dieses Teiles werden obenstehend benutzt die Beziehungen:

$$\varrho_0 \varrho_b = (s-a)(s-c)$$

und

$$\varrho_a \varrho_c = s(s-b).$$

Erkl. 278. Aus den Werten für $n_a n_b n_c$ kann man auch Ausdrücke für die Höhenabschnitte in r und ϱ angeben. Es wird nämlich:

$$h_a' = 2n_a = 2r + \varrho_0 - \varrho_a,$$

$$h_b' = 2n_b = 2r + \varrho_0 - \varrho_b,$$

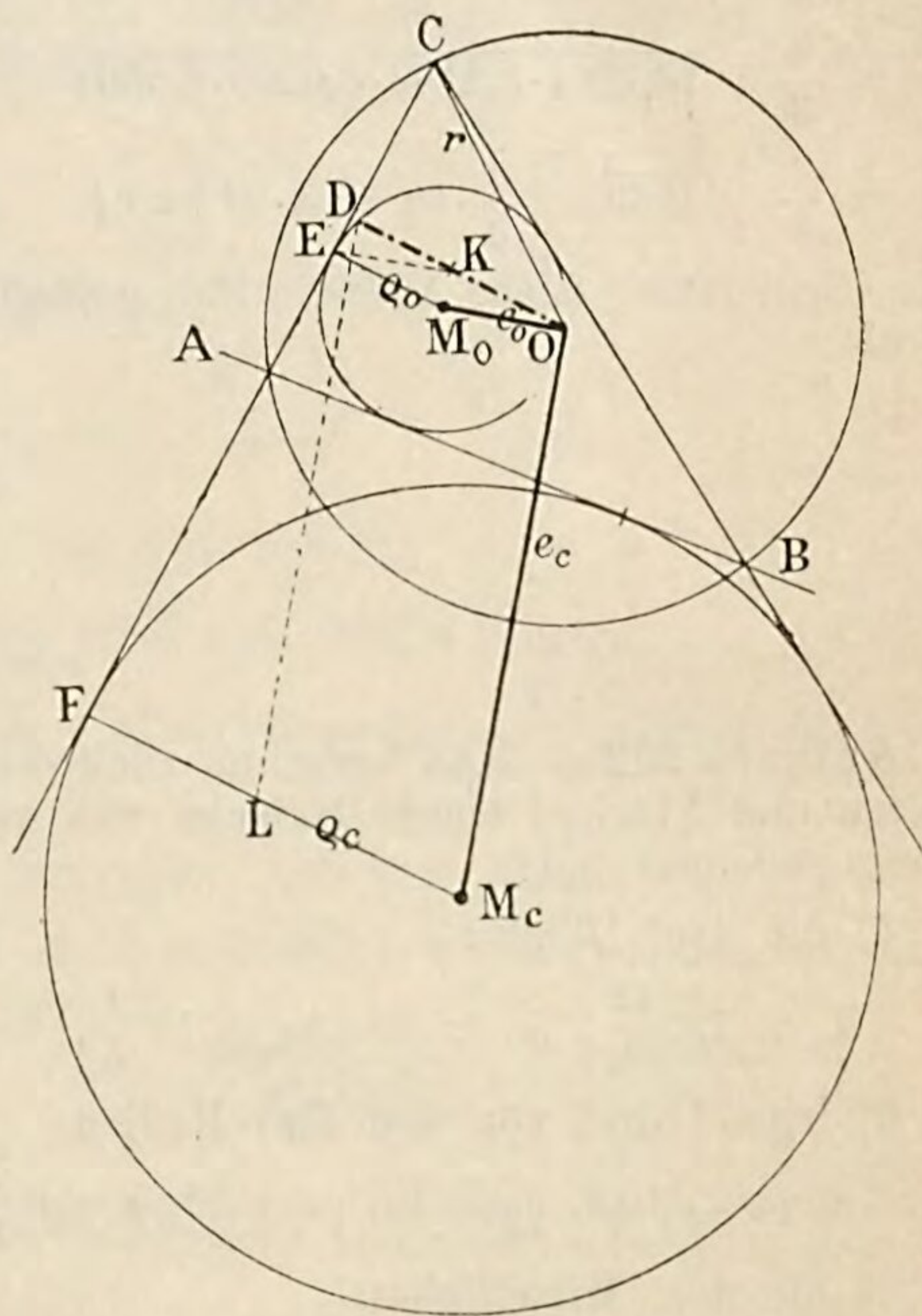
$$h_c' = 2n_c = 2r + \varrho_0 - \varrho_c.$$

Da nun die Grössen ϱ sämtlich in den drei Seiten ausgedrückt wurden, so kann auch:

$$r = \frac{1}{4}(\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho_0)$$

aus den Seiten berechnet werden (s. Erkl. 137) und endlich auch die oberen Höhenabschnitte

Figur 77.



und Mittelsenkrechten. Gleichzeitig sind durch Subtraktion vom Werte der ganzen Höhe auch die unteren Höhenabschnitte aus den Seiten berechenbar.

Aufgabe 192. Man berechne die Grösse der drei Mittellinien bei einem Dreieck mit den Seiten 13, 14, 15.

Erkl. 279. Bildet man aus

$$m_a = 12,9711 \dots$$

$$m_b = 12,1655 \dots$$

$$m_c = 11,2361 \dots$$

$$2\sigma = 36,3727 \dots$$

$$\sigma = 18,1864 \dots$$

$$\sigma - m_a = 5,2153$$

$$\sigma - m_b = 6,0209$$

$$\sigma - m_c = 6,9503$$

so entsteht:

$$F = \frac{4}{3} \sqrt{\sigma(\sigma - m_a)(\sigma - m_b)(\sigma - m_c)}$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{18,1864 \cdot 5,2153 \cdot 6,0209 \cdot 6,9503}$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{3969} = \frac{4}{3} \cdot 63 = 4 \cdot 21 = 84,$$

wie schon früher (siehe Aufgabe 188) gefunden wurde.

Auflösung. Nach Antwort der Frage 49 ist:

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2(169 + 196) - 225}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{505} = 11,2361 \dots$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(c^2 + a^2) - b^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{592} = 12,1655 \dots$$

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(c^2 + b^2) - a^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{673} = 11,9711 \dots$$

Hiernach wird nach Antwort der Frage 50:

$$1) m_a^2 - m_b^2 = \frac{673 - 592}{4} = \frac{81}{4}$$

$$= \frac{3}{4} (196 - 169) = \frac{3}{4} (b^2 - a^2),$$

$$2) m_a^2 + 2m_b^2 = \frac{673 + 2 \cdot 592}{4} = \frac{1857}{4}$$

$$= \frac{3}{4} (2 \cdot 225 + 169) = \frac{3}{4} (2c^2 + a^2),$$

$$3) 2(m_a^2 + m_b^2) - m_c^2 = \frac{2}{4} (673 + 592) - \frac{505}{4}$$

$$= \frac{2025}{4} = \frac{9}{4} \cdot 225 = \frac{9}{4} c^2.$$

Aufgabe 192 a. Man berechne rückwärts Seiten und Flächen eines Dreiecks, von welchem gegeben sind:

1) die drei Höhen:

$$h_a = 12 \frac{12}{13}, h_b = 12, h_c = 11 \frac{1}{5},$$

2) irgend drei von den fünf Radien:

$$\varrho_0 = 4, \varrho_a = 10,5, \varrho_b = 12, \varrho_c = 12; r = 8 \frac{1}{8},$$

3) die drei Mittellinien:

$$m_a = 11,97, m_b = 12,17, m_c = 11,24.$$

Auflösung. 1) Sind die drei Höhen gegeben, so erhält man nach Erkl. 118 oder Aufgabe 190, 7):

$$a = \frac{2}{h_a} w, b = \frac{2}{h_b} w, c = \frac{2}{h_c} w, F = w,$$

wo:

$$w = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \left(-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}}$$

Man berechnet also zunächst:

$$\frac{1}{h_a} = \frac{13}{168}, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{1}{12} = \frac{14}{168}, \quad \frac{1}{h_c} = \frac{5}{56} = \frac{15}{168};$$

also:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{42}{168}, \quad -\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{16}{168}, \quad \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{14}{168}, \quad \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{12}{168}.$$

Folglich wird:

$$w = \frac{1}{\sqrt{\frac{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12}{168^4}}} = \frac{168^2}{\sqrt{6 \cdot 7 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 6}} = \frac{168^2}{6 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{168}{2} = 84 = F.$$

Und

$$a = \frac{2}{h_a} \cdot 84 = 13, \quad b = \frac{2}{h_b} \cdot 84 = 14, \quad c = \frac{2}{h_c} \cdot 84 = 15.$$

2) Sind drei von den Berührungsradien gegeben, so findet man sofort den vierten aus der Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho_0},$$

z. B. oben:

$$\frac{1}{\varrho_a} = \frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_b} - \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} = \frac{21 - 7 - 6}{84} = \frac{8}{84}, \quad \varrho_a = \frac{84}{8} = 10 \frac{1}{2}.$$

Dagegen hat man, wenn r und zwei ϱ , etwa ϱ_a und ϱ_b , gegeben sind, zur Berechnung der beiden andern ϱ die zwei Gleichungen:

$$\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b}$$

und

$$4r - \varrho_a - \varrho_b = \varrho_c - \varrho_0.$$

Erstere gibt:

$$\frac{\varrho_c - \varrho_0}{\varrho_c \cdot \varrho_0} = \frac{\varrho_b + \varrho_a}{\varrho_a \cdot \varrho_b},$$

also:

$$\varrho_c \cdot \varrho_0 = \frac{\varrho_a \cdot \varrho_b}{\varrho_a + \varrho_b} (4r - \varrho_a - \varrho_b).$$

So wird mit obigen Werten:

$$\varrho_c - \varrho_0 = 10, \quad \varrho_c \cdot \varrho_0 = \frac{21 \cdot 6}{22,5} \cdot 10 = 56,$$

also $\varrho_0 = 4$, $\varrho_c = 14$.

Nun setzt man nach Erkl. 113:

$$F = \sqrt{\varrho_0 \varrho_a \varrho_b \varrho_c} = \sqrt{4 \cdot 10,5 \cdot 12 \cdot 14} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 7} = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 84.$$

Ferner:

$$s = \frac{\varrho_a \varrho_b \varrho_c}{F}, \quad s - a = \frac{\varrho_0 \varrho_b \varrho_c}{F},$$

also:

$$a = \frac{\varrho_b \varrho_c}{F} (\varrho_a - \varrho_0) = (\varrho_a - \varrho_0) \sqrt{\frac{\varrho_b \varrho_c}{\varrho_0 \varrho_a}}.$$

Ebenso:

$$b = (\varrho_b - \varrho_0) \sqrt{\frac{\varrho_c \varrho_a}{\varrho_0 \varrho_b}}, \quad c = (\varrho_c - \varrho_0) \sqrt{\frac{\varrho_a \varrho_b}{\varrho_0 \varrho_c}}.$$

Allgemeiner:

$$a = \frac{\varrho_a - \varrho_0}{\varrho_a} \sqrt{\frac{\varrho_a \varrho_b \varrho_c}{\varrho_0}} = \frac{\varrho_a - \varrho_0}{\varrho_a \cdot \varrho_0} \cdot F, \quad b = \frac{\varrho_b - \varrho_0}{\varrho_b} \sqrt{\frac{\varrho_a \varrho_b \varrho_c}{\varrho_0}} = \frac{\varrho_b - \varrho_0}{\varrho_b \cdot \varrho_0} \cdot F,$$

$$c = \frac{\varrho_c - \varrho_0}{\varrho_c} \sqrt{\frac{\varrho_a \varrho_b \varrho_c}{\varrho_0}} = \frac{\varrho_c - \varrho_0}{\varrho_c \cdot \varrho_0} \cdot F.$$

Erkl. 279 a. Man findet ϱ_c und ϱ_0 im nebenstehenden entweder durch unmittelbare Zerlegung:

$\varrho_c \cdot \varrho_0 = 56 = 14 \cdot 4$ und $\varrho_c - \varrho_0 = 10 = 14 - 4$, oder als die beiden Längen der quadratischen Gleichung:

$$x^2 - (\varrho_c + \varrho_0)x + \varrho_c \cdot \varrho_0 = 0$$

$$x^2 - 10x - 56 = 0$$

$$x_1 = 14 = \varrho_c, \quad -x_2 = 4 = \varrho_0.$$

Also:

$$a = \frac{6,5}{10,5} \cdot \sqrt{\frac{10,5 \cdot 12 \cdot 14}{4}} = \frac{13}{21} \cdot 21 = 13, \quad b = \frac{8}{12} \cdot 21 = 14, \quad c = \frac{10}{14} \cdot 21 = 15.$$

3) Sind die drei Mittellinien gegeben, so hat man zunächst, wie in Erkl. 279:

$$F = \frac{4}{3} \sqrt{\varrho(\varrho - m_a)(\varrho - m_b)(\varrho - m_c)} = 84.$$

Ferner nach Erkl. 123:

$$a = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2} = \frac{2}{3} \sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{592}{2} + \frac{505}{2} - \frac{673}{4}} \\ = \frac{1}{3} \sqrt{1521} = 13$$

$$b = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_c^2 + m_a^2) - m_b^2} = \frac{2}{3} \sqrt{2m_c^2 + 2m_a^2 - m_b^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{505}{2} + \frac{673}{2} - \frac{592}{4}} \\ = \frac{1}{3} \sqrt{1764} = 14$$

$$c = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_a^2 + m_b^2) - m_c^2} = \frac{2}{3} \sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{673}{2} + \frac{592}{2} - \frac{505}{4}} \\ = \frac{1}{3} \sqrt{2025} = 15.$$

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgaben 193 bis 201. Man berechne die Elemente eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem gegeben sind:

- 193) $a = 5, \quad b = 3,75.$
- 194) $b = 3,75, \quad c = 6,25.$
- 195) $b = 3,75, \quad h = 3.$
- 196) $b = 3,75, \quad q = 2,25.$
- 197) $h = 3, \quad q = 2,25.$
- 198) $p = 4, \quad q = 2,25.$
- 199) $b = 3,75, \quad p = 4.$
- 200) $c = 6,25, \quad h = 3.$
- 201) $F = 9,375, \quad c = 6,25.$

Andeutung. Die Auflösungen der Aufgaben 193 bis 201 sind analog den Auflösungen der Aufgaben 169 bis 177.

Aufgaben 202 bis 209. Man berechne die Elemente eines schiefwinkligen Dreiecks, von welchem gegeben sind:

- 202) $a = 13,7, \quad b = 23,3, \quad c = 29,6.$
- 203) $b = 23,3, \quad c = 29,6, \quad p_b = 26,424.$
- 204) $b = 23,3, \quad c = 29,6, \quad h_c = 10,5.$
- 205) $b = 23,3, \quad p_c = 8,8, \quad q_c = 20,8.$
- 206) $h_c = 10,5, \quad p_c = 8,8, \quad q_c = 20,8.$
- 207) $a = 13,7, \quad c = 29,6, \quad p_a = 5,314.$
- 208) $a = 13,7, \quad b = 23,3, \quad p_c = 8,8.$
- 209) $a = 13,7, \quad h_b = 13,339, \quad h_c = 10,5.$

Andeutung. Die Auflösungen der Aufgaben 202 bis 209 sind analog den Auflösungen der Aufgaben 179 bis 186.

Aufgabe 210. Man berechne die Höhen und den Inhalt des Dreiecks in Aufgabe 202 unmittelbar aus den Seiten.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 187 und 188.

Aufgabe 211. Man berechne die Berührungsradien desselben Dreiecks.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 189.

Aufgabe 212. Man bestätige für dasselbe Dreieck:

$$F = \sqrt{\varrho_0 \varrho_a \varrho_b \varrho_c}.$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 190.

Aufgabe 213. Man berechne den Radius des Umkreises für dasselbe Dreieck.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 191 und Erkl. 278.

Aufgabe 214. Man berechne die Mittelsenkrechten und beiderlei Höhenabschnitte desselben Dreiecks.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 191 und Erkl. 278.

Aufgabe 215. Man berechne die Mittellinien desselben Dreiecks.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 192.

Aufgabe 215 a. Man soll aus den in den Aufgaben 210 bis 214 berechneten Dreieckselementen je rückwärts die Seiten und Flächen der Dreiecke wieder berechnen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 192 a.



6) Aufgaben über Flächen mit gegebenen Winkelbeziehungen.

(Zu Abschnitt 6.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 216. Man soll beweisen, dass die beiden Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks zwei inhaltsgleiche Dreiecke bilden mit jeder Strecke, welche von der Dreiecksspitze ausgehend auf der Senkrechten zur Höhe gelegen ist.

Auflösung. Die Senkrechte zur Höhe bildet mit der Höhe selbst einen Winkel von 90° , also mit den beiden Schenkeln

Erkl. 280. Da die Senkrechte zur Höhe auch parallel ist zur Grundseite, so haben die Dreiecke vorgenannter Art ausser der gemeinsamen Seite auch gleiche Höhe, sind also inhaltsgleich.

Winkel von $90 \pm \frac{\gamma}{2}$, welche supplementär sind. Da ausserdem die Schenkel gleichlang sind, so hat man Dreiecke der in Antwort der Frage 51 behandelten Art, also mit gleichem Inhalt.

Aufgabe 217. Könnte man den Flächeninhalt einer Figur auch mit andern als parallelogrammartigen Flächenelementen, z. B. mit Kreisen ausmessen?

Erkl. 281. Quadrat und Rhombus sind solche Figuren, die sich mit vollständiger Berührung aneinanderlegen lassen. Auch mit gleichseitigen Dreiecken oder mit gleichschenkligen rechtwinkligen lässt sich ein Raum vollständig ausfüllen, da je zwei einander zu einem Rhombus bzw. Quadrat ergänzen; und ebenso mit beliebigen Dreiecken, wenn je zwei zu einem Parallelogramm zusammengelegt werden.

Erkl. 282. Ein Fünfeck ist nicht verwendbar, dagegen bildet ein sehr bekanntes Beispiel das regelmässige Sechseck, da dessen Winkel von je 120° zu je drei am gleichen Scheitel einen Vollwinkel bilden. (Man vergl. die Aneinanderreihung von Bienenzellen u. s. w.)

Aufgabe 218. Man beweise den Satz in Erkl. 128 statt durch Aufeinanderlegen der Dreiecke, durch Aneinanderlegen.

Erkl. 283. Ob man zwei Dreiecke mit von gleichen Seiten eingeschlossenem supplementärem Winkel stets in nebenstehender Weise aneinanderlegen kann, ist davon abhängig, ob die Drehungsrichtung des eingeschlossenen Winkels beidemale die entgegengesetzte oder dieselbe ist. Im letzteren Fall kann aber durch eine Umklappung des Dreiecks bei gleichbleibendem Inhalte die Möglichkeit erreicht werden.

Aufgabe 219. Man berechne die Winkelhalbierenden und deren Seitenabschnitte in dem Dreieck in Aufgabe 179 mit den Seiten 51, 52, 53.

Erkl. 284. Man bestätigt leicht auch die Einzelbeziehungen:

$$c : a = u_b : v_b \dots 53 : 51 = 26,5 : 25,5 \\ = 5 \cdot 5,3 : 5 \cdot 5,1,$$

$$u_a \cdot u_b \cdot u_c = v_a \cdot v_b \cdot v_c \dots 25,26 \cdot 26,5 \cdot 26,24 \\ = 25,74 \cdot 25,5 \cdot 26,76,$$

beide Produkte = 17565;

$$\frac{v_c \cdot v_a}{u_c \cdot u_a} = \frac{u_b}{v_b} = \frac{c}{a} \dots \frac{26,76 \cdot 25,74}{26,24 \cdot 25,26} \\ = \frac{688,8}{662,8} = \frac{13 \cdot 53}{13 \cdot 51}$$

wie oben.

Die zweite dieser Beziehungen ist besonders bemerkenswert und bildet einen speziellen Fall eines allgemeinen Satzes, welcher später noch

Auflösung. Man kann zur Ausmessung eines Flächeninhaltes nur solche Flächenelemente verwenden, welche sich nach allen Richtungen in vollständiger Berührung aneinander anschliessen lassen. Solches ist bei allen Parallelogrammen mit gleichen Winkeln und Seiten der Fall, nicht aber z. B. beim Kreise. Denn wenn mehrere Kreise aneinander angelegt würden, so blieben stets Zwischenräume dazwischen frei. Auch ungleichartige Parallelogramme können nur dann verwendet werden, wenn sie stets in paralleler Lage aneinander angeschlossen werden, da sonst ebenfalls unbedeckte Zwischenräume offen bleiben.

Auflösung. Legt man zwei Dreiecke mit supplementärem Winkel und gleichgrossen einschliessenden Seiten so aneinander, dass der Scheitel und zwei gleiche Schenkel aufeinanderfallen, so bilden die andern Schenkel eine gerade Linie, also entsteht ein einziges Dreieck, in welchem die vorigen gleichen Schenkel die Mittellinie bilden. Die Einzeldreiecke haben dann unmittelbar gleichgrosse Grundseite und gemeinsame Spitze, also gleichen Inhalt.

Auflösung. Aus den Ergebnissen der Antwort der Frage 56 erhält man zunächst die Abschnitte:

$$u_a = \frac{ab}{b+c} = \frac{51 \cdot 52}{105} = 25,26,$$

$$v_a = \frac{a \cdot c}{a+c} = \frac{51 \cdot 53}{105} = 25,74,$$

auch $= a - u_a$. Ebenso:

$$u_b = \frac{bc}{a+c} = \frac{52 \cdot 53}{104} = 26,5,$$

$$v_b = 25,5, \quad u_c = 26,24, \quad v_c = 26,76.$$

Und sodann wird:

$$w_c^2 = a \cdot b - u_c \cdot v_c = 51 \cdot 52 - 26,24 \cdot 26,76 \\ = 1949,8,$$

also:

$$w_c = \sqrt{1949,8} = 44,16.$$

genauerer Betrachtung unterzogen werden wird.
(Siehe im VII. Teile dieses Lehrbuches über den Satz des Ceva.)

Ebenso:

$$w_a = \sqrt{b \cdot c - u_a \cdot v_a} = 45,88, \\ w_b = 45,03.$$

Oder auch in anderer Rechnung:

$$w_b = \frac{1}{a+c} \sqrt{a \cdot c (a+b+c)(a-b+c)} = \frac{1}{104} \cdot \sqrt{51 \cdot 53 \cdot 156 \cdot 52} = \frac{3}{2} \sqrt{17 \cdot 53} = 45,03.$$

Endlich auch:

$$c = \sqrt{\frac{u_b}{v_b} (w_c^2 + u_b v_b)} = \sqrt{\frac{v_a}{u_a} (w_a^2 + u_a v_a)},$$

nämlich:

$$\sqrt{\frac{26,5}{25,5} (44,16^2 + 26,5 \cdot 25,5)} = 53 = \sqrt{\frac{25,74}{25,26} (45,88^2 + 25,74 \cdot 25,26)}.$$

Aufgabe 220. Man berechne für dasselbe Dreieck den Radius des Umkreises und die Höhenabschnitte.

Erkl. 285. Auch für die Beziehungen zwischen dem Radius des Umkreises und den Höhenabschnitten erhält man leicht die ziffermässige Bestätigung der in Antwort der Frage 57 und Erkl. 140 enthaltenen Gleichungen.

Auflösung. Man kann rechnen:

$$r = \frac{a \cdot b}{2 \cdot h_c} = \frac{b \cdot c}{2 \cdot h_a} = \frac{a \cdot c}{2 \cdot h_b} = \frac{a b c}{4 F},$$

also für dasselbe Dreieck aus Aufgabe 179

$$r = \frac{51 \cdot 52}{2 \cdot 44,15} = \frac{52 \cdot 53}{2 \cdot 45,89} = \frac{51 \cdot 53}{2 \cdot 45} \\ = \frac{51 \cdot 52 \cdot 53}{4 \cdot 1170} = 30,03.$$

Ferner erhält man:

$$h_a' = \frac{c q_c}{h_a} = \frac{b p_b}{h_a} = \frac{1456}{45,89} = 31,7$$

und

$$h_a'' = \frac{p_a q_a}{h_a} = 14,15,$$

wie auch unmittelbar $= h_a - h_a'$.

Und ebenso entstehen die übrigen Höhenabschnitte dieses Dreiecks.

Aufgabe 221. Man soll einen Ausdruck für die Höhenabschnitte unmittelbar aus den drei Seiten des Dreiecks aufstellen.

Erkl. 286. Die Ausdrücke für h_b' und h_b'' , h_c' und h_c'' sind durch cyklische Buchstabenvertauschung aus Nebenstehendem zu erhalten.

Ferner kann man nachweisen, dass:

$$h_a' + h_a'' = h_a,$$

denn:

$$\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4 F} \cdot a + \frac{(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{8 a F} \\ = \frac{-2 a^4 + 2 a^2 b^2 + 2 a^2 c^2 + a^4 - b^4 - c^4 + 2 b^2 c^2}{8 a F} \\ = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2 a^2 b^2 + 2 b^2 c^2 + 2 c^2 a^2}{8 F \cdot a} \\ = (\text{nach Erkl. 124}) \frac{4 F \cdot 4 F}{8 a F} = \frac{2 F}{a},$$

dem Werte für h_a .

Auflösung. Da nach Antwort der Frage 57, 4):

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2 h_a \cdot h_a'$$

ist, so kann man ableiten:

$$h_a' = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2 h_a};$$

nun ist aber:

$$h_a = \frac{2}{a} \cdot F,$$

also hier eingesetzt:

$$h_a' = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4 F} \cdot a \\ = \frac{(-a^2 + b^2 + c^2) \cdot a}{4 \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

Und h_a'' aus der Gleichung:

$$r = h_c' \cdot h_b' : 2h_a''$$

ist folgendermassen zu erhalten:

$$h_a'' = \frac{h_b' \cdot h_c'}{2r} = \frac{(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) \cdot bc}{2 \cdot 4F \cdot 4F} \cdot \frac{4F}{abc} = \frac{(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{8a \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

Aufgabe 222. Man bestimme die Werte der sämtlichen Dreieckselemente für das rechtwinklige Dreieck mit Seiten 3, 4, 5.

Auflösung. Man hat:

$$a = hb = qa = 3, \quad b = ha = pb = 4, \quad c = 5,$$

$$F = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6, \quad h_c = \frac{2F}{c} = 2,4;$$

$$pa = qb = 0, \quad pc = \frac{a^2}{c} = 1,8, \quad qc = \frac{b^2}{c} = 3,2;$$

$$\varrho_0 = t_3 = \frac{a + b - c}{2} = 1,$$

$$\varrho_a = t_2 = \frac{a - b + c}{2} = 2,$$

$$\varrho_b = t_1 = \frac{-a + b + c}{2} = 3,$$

$$\varrho_c = t_3''' = \frac{a + b + c}{2} = 6;$$

$$n_c = 0 = h_c', \quad h_c'' = h_c = 2,4;$$

$$n_a = \frac{b}{2} = 2, \quad n_b = \frac{a}{2} = 1,5;$$

$$h_a'' = 0 = h_b'', \quad h_a' = h_a = b = 4, \\ h_b' = h_b = a = 3;$$

$$r = \frac{c}{2} = 2,5;$$

$$m_c = r = \frac{c}{2} = 2,5,$$

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{3b^2 + c^2} = \frac{1}{2} \sqrt{73} = 4,277,$$

$$m_b = \sqrt{c^2 - \frac{3}{4}b^2} = \sqrt{13} = 3,606;$$

$$w_a = b \sqrt{\frac{2c}{b+c}} = \frac{4}{3} \sqrt{10} = 4,216,$$

$$u_a = \frac{ab}{b+c} = \frac{4}{3}, \quad v_a = \frac{ac}{b+c} = \frac{5}{3};$$

$$w_b = a \sqrt{\frac{2c}{a+c}} = \frac{3}{2} \sqrt{5} = 3,354,$$

$$u_b = \frac{bc}{a+c} = \frac{5}{2}, \quad v_b = \frac{ab}{a+c} = \frac{3}{2};$$

$$w_c = \frac{ab}{a+b} \sqrt{2} = \frac{12}{7} \sqrt{2} = 2,424,$$

$$u_c = \frac{ac}{a+b} = \frac{15}{7}, \quad v_c = \frac{bc}{a+b} = \frac{20}{7}.$$

Erkl. 287. Die Entwicklung der Formel:
 $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$
 gibt nach Erkl. 124:

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

Setzt man hierin $c^2 = a^2 + b^2$, so entsteht:

$$2a^2b^2 + 2c^4 - a^4 - b^4 - c^4$$

$$= 2a^2b^2 + c^4 - a^4 - b^4$$

$$= 2a^2b^2 - a^4 - b^4 + (a^2 + b^2)^2 = 4a^2b^2.$$

Es bestätigen sich leicht auch die übrigen Beziehungen ziffermässig:

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 36$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 9 \cdot 16 = \frac{1}{4} \cdot 25 \cdot 2,4^2 = \varrho_0 \varrho_a \varrho_b \varrho_c$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6;$$

$$r + \varrho_0 = 3,5 = n_a + n_b + n_c = 2 + 1,5 + 0$$

$$= \frac{a+b}{2}, \quad r - \varrho_a = 0,5 = \frac{b-a}{2};$$

$$\varrho_a \cdot \varrho_b = \varrho_0 \cdot \varrho_c = \frac{ab}{2} = 6,$$

$$\varrho_a \varrho_b \varrho_c = \frac{ab}{2} \cdot s = 36;$$

$$e_0^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 = \frac{1}{4} (5 + 65 + 85 + 145)$$

$$= \frac{300}{4} = 75 = 12r^2 = 12 \cdot 6,25.$$

Endlich die Entfernungen:

$$e_0 = \sqrt{r(r-2\rho_0)} = \sqrt{2,5 \cdot 0,5} = \frac{1}{2} \sqrt{5} = 1,118,$$

$$e_a = \sqrt{r(r+2\rho_a)} = \frac{1}{2} \sqrt{65} = 4,031,$$

$$e_b = \sqrt{r(r+2\rho_b)} = \frac{1}{2} \sqrt{85} = 4,610,$$

$$e_c = \sqrt{r(r+2\rho_c)} = \frac{1}{2} \sqrt{145} = 6,021.$$

Aufgabe 223. Desgleichen für ein gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkeln von je 25, Grundseite von 14 m Länge.

Erkl. 288. Auf der Symmetrieachse des gleichschenkligen Dreiecks liegen (vgl. Fig. 165 und Antwort der Frage 166 im IV. Teile dieses Lehrbuches) die Punkte C , O (Mittelpunkt des Umkreises), S (Schwerpunkt), N (Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises), M (Mittelpunkt des Inkreises), H (Höhenpunkt), D (Mittelpunkt der Grundseite), M_c (Mittelpunkt des Ankreises an c). Die Abstände dieser Punkte von C sind der Reihe nach:

$$CO = h - n_c = 24 - 10 \frac{47}{48} = 13 \frac{1}{48},$$

$$CS = \frac{2}{3} \cdot m_c = 16,$$

$$CM = h - \rho_0 = 18 \frac{3}{4},$$

$$CH = h_c' = 21 \frac{23}{24},$$

$$CN = \frac{1}{2} (CO + CH) = 17 \frac{47}{96},$$

$$CD = 24,$$

$$CM_c = h + \rho_c = 33 \frac{1}{3},$$

$$e_0 = OM = 5 \frac{35}{48},$$

$$e_c = OM_c = 20 \frac{5}{16}.$$

Greift man einzeln heraus:

$$OH = CH - CO = 8 \frac{15}{16},$$

$$OS = CS - CO = 2 \frac{47}{48},$$

$$SN = CN - CS = 1 \frac{47}{96},$$

$$NH = NO = CN - CO = 4 \frac{15}{32},$$

$$SH = CH - CS = 5 \frac{23}{24},$$

so bestätigt sich der Satz in Antwort der Frage 165 des IV. Teiles, dass:

$$OH = 6 \cdot NS = 3 \cdot OS = 2 \cdot NH = \frac{3}{2} \cdot SH,$$

Auflösung. Da alle Werte für die Schenkelseiten a und b symmetrisch gleich sind, so brauchen nur solche für Schenkel a und Grundseite c aufgestellt zu werden. Man erhält:

$$h_c = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = 24,$$

$$p_c = q_c = \frac{c}{2} = 7,$$

$$F = \frac{c \cdot h_c}{2} = 168 \text{ qm},$$

$$h_a = \frac{2F}{a} = \frac{336}{25} = 13,44,$$

$$p_a = q_b = \sqrt{a^2 - h_a^2} = \sqrt{38,44 \cdot 11,56} = 6,2 \cdot 3,4 = 21,08,$$

$$q_a = p_b = \sqrt{c^2 - h_a^2} = \sqrt{27,44 \cdot 0,56} = 3,92,$$

$$\rho_0 = \frac{F}{s} = \frac{168}{32} = 5,25,$$

$$\rho_a = h_c = 24,$$

$$\rho_c = \frac{F}{s - c} = \frac{168}{18} = 9 \frac{1}{3},$$

$$r = \frac{a^2}{2h} = \frac{625}{48} = 13 \frac{1}{48},$$

$$h_a' = \frac{c \cdot q_c}{h_a} = \frac{c^2}{2h_a} = \frac{196}{26,88} = 7 \frac{7}{24},$$

$$h_a'' = \frac{p_a q_a}{h_a} = 6 \frac{89}{600}, \text{ zusammen } 13 \frac{11}{25},$$

$$h_c' = \frac{a \cdot p_a}{h_c} = 21 \frac{23}{24},$$

$$h_c'' = \frac{p_c q_c}{h_c} = \frac{c^2}{4h_c} = 2 \frac{1}{24}, \text{ zusammen } 24,$$

$$n_a = \frac{1}{2} h_a' = 3 \frac{31}{48},$$

$$n_b = \frac{1}{2} h_c' = 10 \frac{47}{48},$$

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1017} = 15,945,$$

$$m_c = h_c = 24,$$

$$w_a = \frac{c}{a+c} \sqrt{a(2a+c)} = \frac{14}{39} \sqrt{25 \cdot 64} = 14 \frac{14}{39},$$

nämlich:

$$8 \frac{15}{16} = 6 \cdot 1 \frac{47}{96} = 3 \cdot 2 \frac{47}{48} = 2 \cdot 4 \frac{15}{32} \\ = \frac{3}{2} \cdot 5 \frac{23}{24}.$$

Die Reihenfolge $COSNMHDM_c$ würde beim stumpfwinkligen Dreieck zu $HCNMSDOM_c$.

$$w_c = h_c = 24,$$

$$u_c = v_c = \frac{c}{2} = 7,$$

$$u_a = \frac{a^2}{a+c} = \frac{625}{39} = 16 \frac{1}{39},$$

$$v_a = \frac{ac}{a+c} = \frac{350}{39} = 8 \frac{38}{39},$$

$$e_0 = \sqrt{r(r-2\rho_0)} = \sqrt{\frac{625 \cdot 121}{48 \cdot 48}} = \frac{25 \cdot 11}{48} = 5 \frac{35}{48}$$

und

$$e_a = \sqrt{r(r+2\rho_a)} = \frac{25}{48} \sqrt{2929} = 28,2,$$

$$e_c = \sqrt{r(r+2\rho_c)} = \frac{25}{48} \sqrt{1521} = 20 \frac{5}{16}.$$

Aufgabe 224. Desgleichen für ein gleichseitiges Dreieck mit Seite $a = 1$.

Auflösung. Man erhält für alle drei Seiten dieselben Buchstabenausdrücke:

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3} = a \cdot 0,866 \dots,$$

$$p = q = \frac{a}{2},$$

$$F = \frac{ah}{2} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = a^2 \cdot 0,433 \dots,$$

$$\rho_0 = h'' = n = \frac{h}{3} = a \cdot 0,289 \dots,$$

$$\rho_a = h = a \cdot 0,866 \dots,$$

$$r = h' = \frac{2h}{3} = 2\rho_0 = a \cdot 0,578 \dots,$$

$$m = w = h, \quad u = v = \frac{a}{2}, \quad e_0 = 0,$$

$$e_a = \frac{4}{3} h = \frac{2}{3} a \sqrt{3} = a \cdot 1,155 \dots$$

Aufgabe 225. Desgleichen für ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck mit der Basis $c = 1$.

Erkl. 290. Ist statt der Länge c die Strecke a gegeben, so wird unter Berücksichtigung der Beziehung $c = a\sqrt{2}$ jede der nebenstehenden Streckengrößen mit $\sqrt{2}$ zu multiplizieren sein, die Fläche aber mit 2, um die Ausdrücke in a bzw. a^2 umzusetzen:

$$h = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad F = \frac{a^2}{2},$$

$$\rho_0 = \frac{a}{2} (2 - \sqrt{2}), \quad \rho_c = \frac{a}{2} (2 + \sqrt{2}),$$

$$n_a = \frac{a}{2}, \quad r = \frac{a}{2} \sqrt{2}.$$

Man erhält m_a unmittelbar als Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a und $\frac{a}{2}$:

$$m_a = \frac{a}{2} \sqrt{5} \text{ u. s. w.}$$

Auflösung. Es wird wie in Auflösung der Aufgabe 222:

$$a = h_b = h_b' = q_a = b = h_a = h_a' = p_b \\ = \frac{c}{\sqrt{2}} = c \cdot 0,7071,$$

$$h_c = h_c'' = \frac{c}{2}, \quad F = \frac{c^2}{4},$$

$$h_a'' = h_b'' = h_c' = p_a = q_b = n_c = 0,$$

$$\rho_0 = \frac{c}{2} (\sqrt{2} - 1) = c \cdot 0,207,$$

$$\rho_a = \frac{c}{2}, \quad \rho_c = \frac{c}{2} (\sqrt{2} + 1) = c \cdot 1,207,$$

$$n_a = \frac{a}{2} = \frac{c}{4} \sqrt{2} = c \cdot 0,354, \quad r = \frac{c}{2},$$

$$m_c = w_c = h_c = r = \frac{c}{2},$$

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{3a^2 + c^2} = \frac{c}{4} \sqrt{10} = c \cdot 0,7906 \dots,$$

$$w_a = a \sqrt{\frac{2c}{a+c}} = c \sqrt{2 - \sqrt{2}} = c \cdot 0,765,$$

$$u_a = \frac{c}{2} (2 - \sqrt{2}) = c \cdot 0,293 \dots,$$

$$v_a = c (\sqrt{2} - 1) = c \cdot 0,414 \dots,$$

$$e_0 = \frac{c}{2} \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}, \quad e_c = \frac{c}{2} \sqrt{3 + 2\sqrt{2}},$$

$$e_a = \frac{c}{a} \sqrt{3} = c \cdot 0,866.$$

Aufgabe 226. In einen Kreis vom Radius $r = 5$ soll ein Rechteck vom Umfang $u = 28$ eingezeichnet werden. Wie gross werden seine Seiten?

Erkl. 291. Man hat verschiedene Lösungsarten für Gleichungen nebenstehender Art. Die angegebene ist die eleganteste. Weniger einfach, aber leichter zu finden ist die Lösung durch Einsetzung von $b = 14 - a$ aus der zweiten in die erste:

$$a^2 + (14 - a)^2 = 100,$$

$$2a^2 - 28a + 196 = 100,$$

$$a^2 - 14a + 48 = 0,$$

$$a = 7 \pm \sqrt{49 - 48},$$

$$a_1 = 8, \quad a_2 = 6.$$

Allgemein wird:

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{2} \pm \sqrt{8r^2 - \frac{u^2}{4}} \right),$$

$$b = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{2} \mp \sqrt{8r^2 - \frac{u^2}{4}} \right).$$

Auflösung. Sind die Seiten a und b , so ist in dem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a und b der Durchmesser $2r$ Hypotenuse, also:

$$a^2 + b^2 = (2r)^2 = 100.$$

Ferner ist der Umfang:

$$u = 2a + 2b,$$

also:

$$a + b = \frac{u}{2} = 14.$$

Man hat also die zwei Gleichungen:

$$\text{I) } a^2 + b^2 = 100,$$

$$\text{II) } a + b = 14.$$

Verdoppelt man die erste und zieht davon das Quadrat der zweiten ab, so kommt:

$$2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = 200 - 196 = 4,$$

also:

$$a - b = 2,$$

folglich:

$$a = \frac{14 + 2}{2} = 8, \quad b = \frac{14 - 2}{2} = 6.$$

Aufgabe 227. Einem Kreise von $\varrho = 5$ soll ein Rhombus von gegebenem Inhalt $F = 300$ umgeschrieben werden. Wie gross wird seine Seite und seine Diagonalen?

Erkl. 292. Man erhält $e + f$ und $e - f$ aus $e^2 - f^2$ und $e \cdot f$, indem man bildet $e^2 + f^2 + 2ef$ und $e^2 + f^2 - 2ef$ und jeweils aus dem Ergebnis die Quadratwurzel auszieht.

Auflösung. Da der Inhalt $F = a \cdot h$ und der Radius des Inkreises $\varrho = \frac{h}{2}$ ist, so wird:

$$a = \frac{F}{h} = \frac{F}{2\varrho} = \frac{300}{10} = 30.$$

Dann wird für die Diagonalen e und f :

$$1) F = \frac{e \cdot f}{2}, \text{ also } e \cdot f = 2F = 600,$$

$$2) a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2, \text{ also } e^2 + f^2 = 4a^2 = 3600.$$

Hieraus erhält man:

$$e + f = \sqrt{3600 + 1200} = \sqrt{4800} = 40\sqrt{3},$$

$$e - f = \sqrt{3600 - 1200} = \sqrt{2400} = 20\sqrt{2}.$$

Daher wird:

$$e = 10\sqrt{3}(2 + \sqrt{2}), \quad f = 10\sqrt{3}(2 - \sqrt{2}).$$

Aufgabe 228. Von einem Parallelogramm kennt man zwei Seiten und eine Diagonale. $a = 6,5$, $b = 7,6$, $e = 8,7$. Wie gross sind Fläche, Höhen, Diagonalen?

Erkl. 293. Man bildet:

$$\begin{aligned} a &= 6,5 \\ b &= 7,6 \\ e &= 8,7 \\ 2s &= a + b + e = 22,8 \\ s &= 11,4 \\ s - a &= 4,9 \\ s - b &= 3,8 \\ s - e &= 2,7 \end{aligned}$$

Erkl. 294. Aus $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$ wird:

$$\begin{aligned} f^2 &= 2(a^2 + b^2) - e^2, \\ f &= \sqrt{2(a^2 + b^2) - e^2} \\ &= \sqrt{2(42,25 + 57,76) - 75,69} \\ &= \sqrt{200,02 - 75,69} = \sqrt{124,33} = 11,15. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 33 : 22 \\ 113 \\ \hline 1120 : 222 \end{array}$$

Aufgabe 229. Von einem Deltoid kennt man die Seiten $a = 15$, $b = 37$ und die Diagonale $e = 24$ der gleichgrossen Winkel. Wie gross ist die andere Diagonale und der Inhalt?

Auflösung. Man findet die Fläche des von den Seiten a , b , e gebildeten Dreiecks nach der Formel:

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-e)}$$

und ebenso dessen Höhen, welche auch die Höhen des Parallelogramms sind, durch Multiplikation dieses Ausdrucks mit $\frac{2}{a}$ und $\frac{2}{b}$. Die Fläche des ganzen Parallelogramms ist dann das Doppelte jener Wurzel.

Also ist:

$$\begin{aligned} F &= 2 \cdot \sqrt{11,4 \cdot 4,9 \cdot 3,8 \cdot 2,7} \\ &= 0,02 \cdot \sqrt{38 \cdot 3 \cdot 49 \cdot 38 \cdot 9 \cdot 3} \\ &= 0,02 \cdot 38 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 = 47,88; \\ h_a &= \frac{2}{6,5} \cdot 23,94 = 7,366 \dots, \\ h_b &= \frac{2}{7,6} \cdot 23,94 = 6,3. \end{aligned}$$

Endlich ist wegen $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$ zu erhalten $f = 11,15$.

Erkl. 295. Den Radius ρ des Inkreises kann man rechnen als Höhe des Dreiecks mit Seiten a , w_a , u_f , also:

$$\rho = \frac{2}{a} \sqrt{(a+w+u)(-a+w+u)(a-w+u)(a+w-u)}.$$

Aufgabe 230. Man soll Seiten und Inhalt eines Antiparallelogramms berechnen, von welchem gegeben sind $a = 15,6$, $b = d = 7,3$, $h = 5,5$.

Erkl. 296. Um den Radius r des Umkreises zu finden, kann man ansetzen die Höhe als Differenz der Strecken:

$$\sqrt{r^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} \text{ und } \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Auflösung. Die Stücke der zweiten Diagonale sind:

$$\sqrt{a^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2} \text{ und } \sqrt{b^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2}$$

also:

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2} + \sqrt{b^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{81} + \sqrt{1224} = 9 + 35 = 44, \\ F &= \frac{e \cdot f}{2} = \frac{24 \cdot 44}{2} = 528. \end{aligned}$$

Auch F kann aus zwei Stücken: Dreieck a , a , e und Dreieck b , b , e zusammengesetzt werden.

Auflösung. Fällt man die Höhe h vom Punkte C oder D , so entsteht ein Dreieck AED , in welchem:

$$p = AE = \sqrt{b^2 - h^2} = 4,8,$$

also ist:

$$c = a - 2p = 15,6 - 9,6 = 7.$$

Aus dieser rein quadratischen Gleichung erhält man $r = \sqrt{114} = 10,7$. Ferner ist:

$$F = \frac{h}{2}(a + c) = \frac{5,5 \cdot 22,6}{2} = 62,15.$$

Dann ist noch:

$$e = \sqrt{(a - p)^2 + h^2} = \sqrt{146,89} = 12,12.$$

Aufgabe 231. Man soll den Satz in Erkl. 154 an den besonderen Vierecken bestätigen.

Erkl. 297. Für die drei Vierecke: Parallelogramm, Deltoid und Antiparallelogramm ist die Einzelbetrachtung schon in Erkl. 154 durchgeführt.

Beim Deltoid ist die Strecke v auf der Diagonale f der ungleichen Winkel gelegen und hat die Länge $\frac{f}{2} - x$ nach Antwort der Frage 61, 2).

Da nun $x = \sqrt{a^2 - \frac{e^2}{4}}$ ist, oder:

$$x = \frac{1}{2f}(f^2 + a^2 - b^2),$$

so erhält man für v die Werte $\frac{f}{2} - \sqrt{a^2 - \frac{e^2}{4}}$ oder:

$$\frac{f}{2} - \frac{1}{2f}(f^2 + a^2 - b^2) = \frac{b^2 - a^2}{2f},$$

oder nach Erkl. 154:

$$\frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - (e^2 + f^2)}.$$

Auflösung. 1) Beim Rhombus ist die Strecke v gleich Null, $a = b = c = d$, also:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4a^2 = e^2 + f^2,$$

oder wie oben $a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2$.

2) Beim Rechteck ist $a = c$, $b = d$, $e = f$, also:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2a^2 + 2b^2$$

und $e^2 + f^2 = 2e^2$, $2(a^2 + b^2) = 2e^2$ oder, wie bekannt, $a^2 + b^2 = e^2$.

3) Beim Quadrat ist $a = b = c = d$, $e = f$, also $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4a^2$, $e^2 + f^2 = 2e^2$; $4a^2 = 2e^2$, also wie früher:

$$a = \frac{e}{\sqrt{2}} = \frac{e}{2} \sqrt{2} \text{ oder } e = a \sqrt{2}.$$

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 232. Ein rechtwinkliges Dreieck habe Kathete 12 und Hypotenuse 17 mit eingeschlossenem Winkel α , ein schiefwinkliges den Winkel $180 - \alpha$ zwischen Seiten 12 und 17. Wie gross ist der Inhalt des letztern?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 216 und Antwort der Frage 51.

Aufgabe 233. Wie viele gleichseitigen Dreiecke von der Seite a sind enthalten in einem gleichseitigen Dreieck von der Seite $3a$?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 217.

Aufgabe 234. Man berechne die Winkelhalbierenden und deren Seitenabschnitte in den Dreiecken in Aufgabe 202 bis 215 mit Seiten 13,7; 23,3; 29,6.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 219.

Aufgabe 235. Man berechne für dasselbe Dreieck die Strecken r , h' , h'' aus den übrigen Stücken, sowie auch direkt aus den Seiten.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 220 und 221.

Aufgabe 236. Man bestimme die Werte der Dreieckselemente für das rechtwinklige Dreieck mit Katheten $17\frac{1}{2}$ und $23\frac{1}{3}$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 222.

Aufgabe 237. Desgleichen für ein gleichschenkliges Dreieck mit Schenkeln 17,5, Grundseite 9,8.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 223.

Aufgabe 238. Desgleichen für ein gleichseitiges Dreieck mit Seite $a = 5$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 224.

Aufgabe 239. Desgleichen für ein gleichseitiges Dreieck mit Höhe $h = 7$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 224.

Aufgabe 240. Desgleichen für ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit Schenkel $a = 8$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 225.

Aufgabe 241. Desgleichen für ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit Basis $c = 10$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 225.

Aufgabe 242. Desgleichen für ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit Höhe $h = 4$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 225.

Aufgabe 243. Man bestimme die Seiten eines Rechtecks mit Umfang 20, Fläche 21.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 226.

Aufgabe 244. Man bestimme die Seite eines Rhombus mit Fläche 20, Diagonale 2.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 227.

Aufgabe 245. Wie gross sind F und e im Parallelogramm, wo $a = 13$, $b = 15,2$, $f = 17,4$?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 228.

Aufgabe 246. Man berechne ein Deltoid, wenn bekannt $a = 7,5$, $b = 18,5$, und die Diagonale $f = 22$ der ungleichen Winkel.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 229.

Aufgabe 247. Berechne ein Antiparallelogramm, wovon $a = 46,8$, $b = 21,9$, $F = 539,35$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 230.

7) Verwandlungsaufgaben.

(Zu Abschnitt 7.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 248. Man soll die Determination zu den Aufgaben in Frage 71 aufstellen.

Erkl. 298. Der Radius r des Kreises in Aufgabe 71, b) ist die Grundseite c selbst, in Aufgabe 71, c) die Hälfte der Grundseite. Man hat also für 71, b) die Bedingung $h \leq c$, für 71, c) die Bedingung $h \leq \frac{c}{2}$. Mit Verwendung der Formel $h = \frac{2F}{c}$ gehen diese Bedingungen über für 71, b) in $F \leq \frac{1}{2} c^2$, für 71, c) in $F \leq \left(\frac{c}{2}\right)^2$, denn das grösste über Hypotenuse c mögliche rechtwinklige Dreieck ist das gleichschenklige mit Höhe $\frac{c}{2}$, dessen Inhalt ist $\frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{c^2}{4}$.

Auflösung. Die Aufgaben 71, c) und 71, d) sind ausnahmslos lösbar, da die Senkrechte im Mittel- oder Endpunkte der Grundseite des Dreiecks die Parallele durch die Spitze jedenfalls trifft.

Die Aufgaben 71, b) und 71, c) sind nur lösbar, wenn die Höhe des gegebenen Dreiecks gleich oder kleiner ist, als der Radius des zur Zeichnung gelangenden Kreises. Ist $h = r$, so erhält man eine einzige Lösung, weil die Parallele den Kreis berührt; $h > r$ gibt keine Lösung, $h < r$ gibt zwei Lösungen.

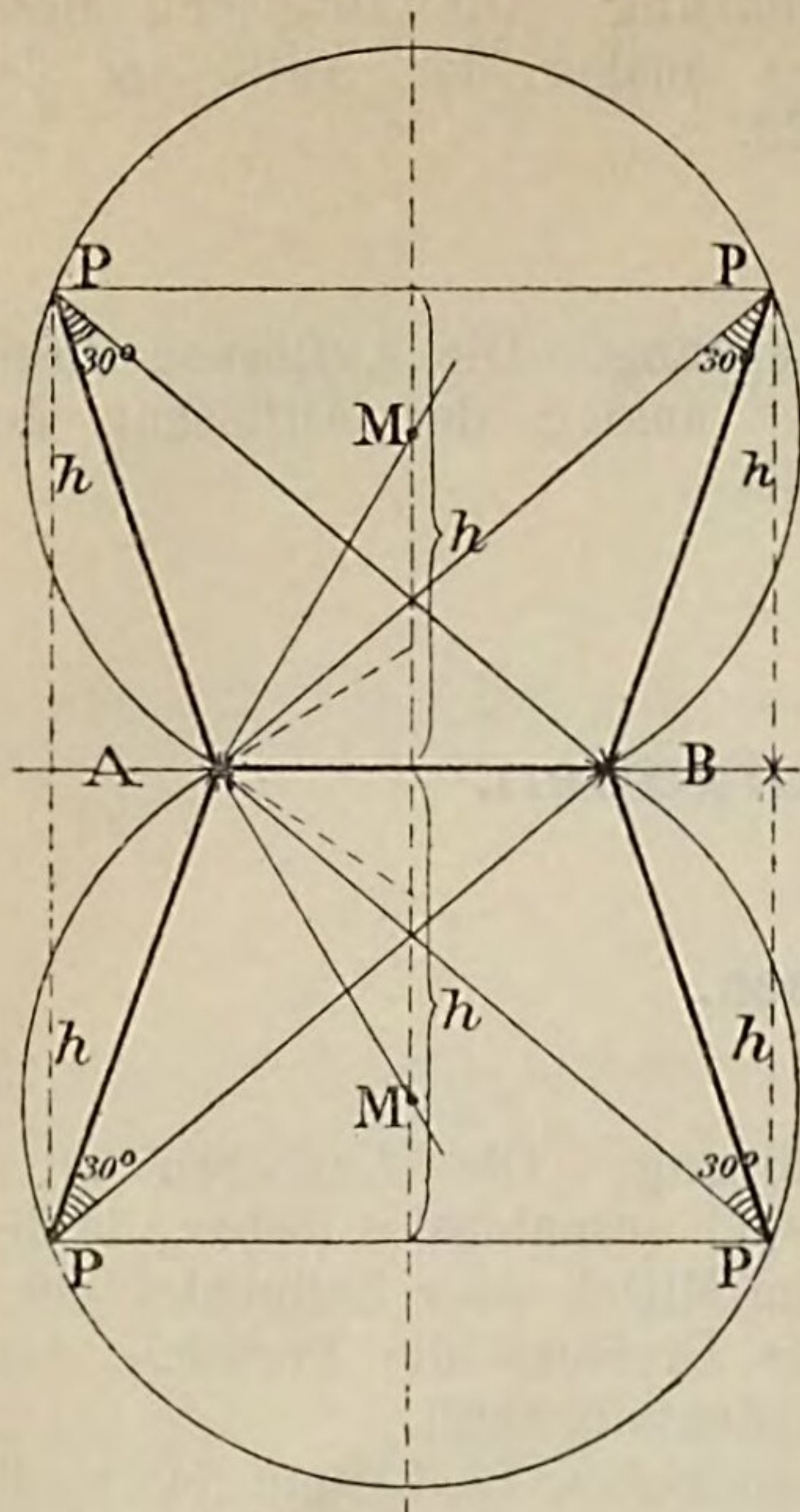
Aufgabe 249. Ein Dreieck soll unter Beibehaltung der Grundseite c in ein anderes mit gegebenem Gegenwinkel γ verwandelt werden.

Erkl. 299. In Figur 78 ist die Aufgabe in zweifacher Weise gelöst: oberhalb und unterhalb AB ; der gewählte Winkel γ ist 30° , wobei der Winkel MAB 60° hat, also leicht mittels Zirkel konstruiert werden kann (vergl. Aufgabe 56 des IV. Teiles).

Auflösung. Da die Grundseite gleichbleiben soll, muss auch die Höhe dieselbe bleiben, also die Spitze auf der Parallelen zur Grundlinie verschoben werden. Nun muss nach dem geometrischen Ortssatze 49 b im IV. Teile die gesuchte Spitze C auf dem Kreisbogen liegen, welcher AB als Sehne und den gegebenen Winkel γ als Sehnentangentenwinkel hat. Also ist die gesuchte Spitze C der Schnittpunkt dieses Kreisbogens mit der durch die Spitze gezogenen Parallelen zur Grundseite.

Man sieht aus Figur 78, dass im allgemeinen Falle zwei Lösungen entstehen können.

Figur 78.



Die Lösung wird aber unmöglich, wenn der gegebene Winkel γ so gross ist, dass der Kreisbogen APB gar nicht von der Parallelen PP geschnitten wird. Das gleichschenklige unter allen inhaltsgleichen Dreiecken über derselben Grundseite AB enthält den grössten möglichen Winkel γ als Gegenwinkel von AB .

Aufgabe 250. Man soll an ein gegebenes Rechteck ein anderes Rechteck so antragen, dass wieder ein Rechteck entsteht.

Erkl. 300. Man kann diese Aufgabe auf zweifache Weise lösen, je nachdem man die eine oder die andere der Seiten des ersten Rechtecks als die beizubehaltende wählt.

Auflösung. Das zweite gegebene Rechteck muss erst nach Antwort der Frage 73 in ein anderes verwandelt werden, welches eine der beiden Seiten des ersten Rechtecks als Seite hat. Dann wird die erhaltene zweite Seitenstrecke als Verlängerung am ersten Rechteck angetragen.

Aufgabe 251. Ein Grundbesitzer wünscht einen Acker von der Form eines Rechtecks auszutauschen gegen ein ebenso grosses Geländestück neben seiner in Form eines stumpfwinkligen Dreiecks ABC längs zweier Strassen AB und AC liegenden Wiese. Wie gross muss letzteres werden?

Erkl. 301. Um den dritten Teil nebenstehender Verwandlungen auszuführen zieht man nach Antwort 73 erst $EM = BC$, dann ML und zuletzt $KN \parallel ML$. Dadurch erhält man Punkt N als Abschluss der Reihe:

$EF GH = EF JK = EL K = EN M = BDC$, also:

$$ADC = ABC + EF GH.$$

Auflösung. Um an ein an der Strassenecke liegendes Dreieck angelegt werden zu können, muss die Rechteckfläche $EF GH$ verwandelt werden in ein Dreieck, welches:

1) den Nebenwinkel des stumpfen Winkels ABC als Winkel hat, und

2) die Strecke BC als Seite.

Man verwandelt also das Rechteck:

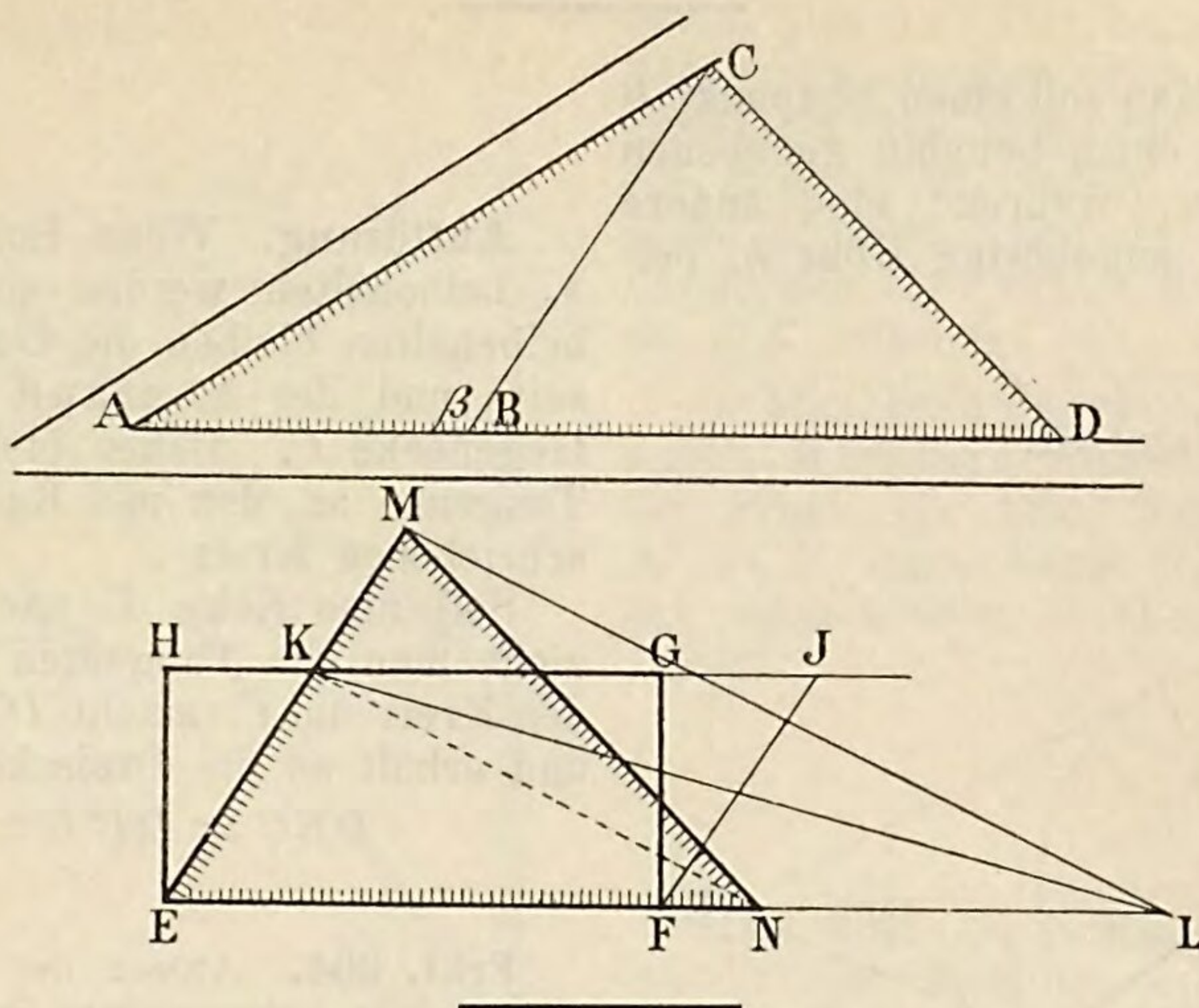
1) in das Parallelogramm $EF JK$ mit Winkel $FEK = 180^\circ - ABC$,

2) das Parallelogramm $EF JK$ in das Dreieck EKL mit Seite $EL = 2 \cdot EF$, und endlich:

3) das Dreieck EKL nach Antwort der Frage 73 in ein solches mit Seite $EM = BC$.

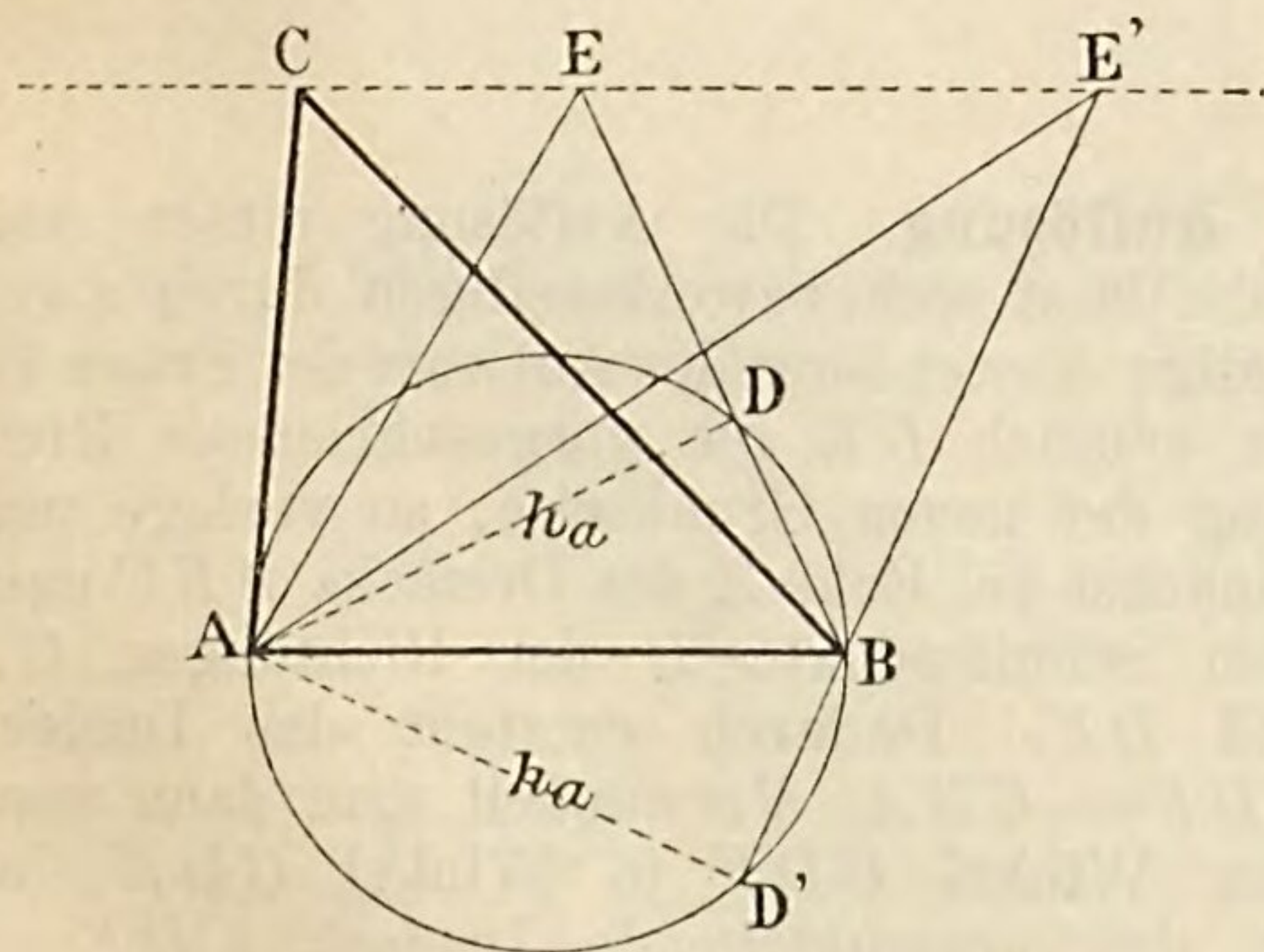
Das so entstandene Dreieck EMN ist gleichgross mit dem Rechteck $EFGH$ und kann an ABC angetragen werden, indem man AB verlängert um die Strecke $BD = EN$.

Figur 79.



Aufgabe 252. Ein Dreieck ABC soll unter Beibehaltung der Seite AB und deren Höhe in ein anderes verwandelt werden, von welchem die anliegende Höhe h_a gegeben ist.

Figur 80.



Erkl. 302. Die Aufgabe ist immer lösbar, und h_a muss kleiner als AB sein. Sie hat zwei Lösungen, da AD zweifach angetragen werden kann.

Aufgabe 253. Man beweise, dass alle Dreiecke inhaltsgleich sind, welche der Mittelpunkt eines Kreises mit einer auf irgend einer Tangente irgendwo angetragenen, aber stets gleichgrossen Strecke bildet.

Auflösung. Da der Fusspunkt D der Höhe h_a der Scheitel eines rechten Winkels ADB ist, so liegt er auf dem Halbkreise über AB .

Man trage daher in den Halbkreis über AB die Strecke h_a als Sehne von A aus ein, ziehe BD und bringe BD zum Schnitt mit der Parallelen durch C zu AB . Dann ist $ABD = ABC$ und enthält $AD = h_a$.

(Da $AD = AD'$, und dieselbe Fläche gleich $\frac{a}{2} \cdot AD = \frac{a'}{2} \cdot AD'$, so muss auch $BE = BE'$ werden. Für rechnermässige Bestimmung kennt man c, h_c, h_a , findet also sofort $a, \pm q_a, p_a$ und die übrigen Dreieckselemente.)

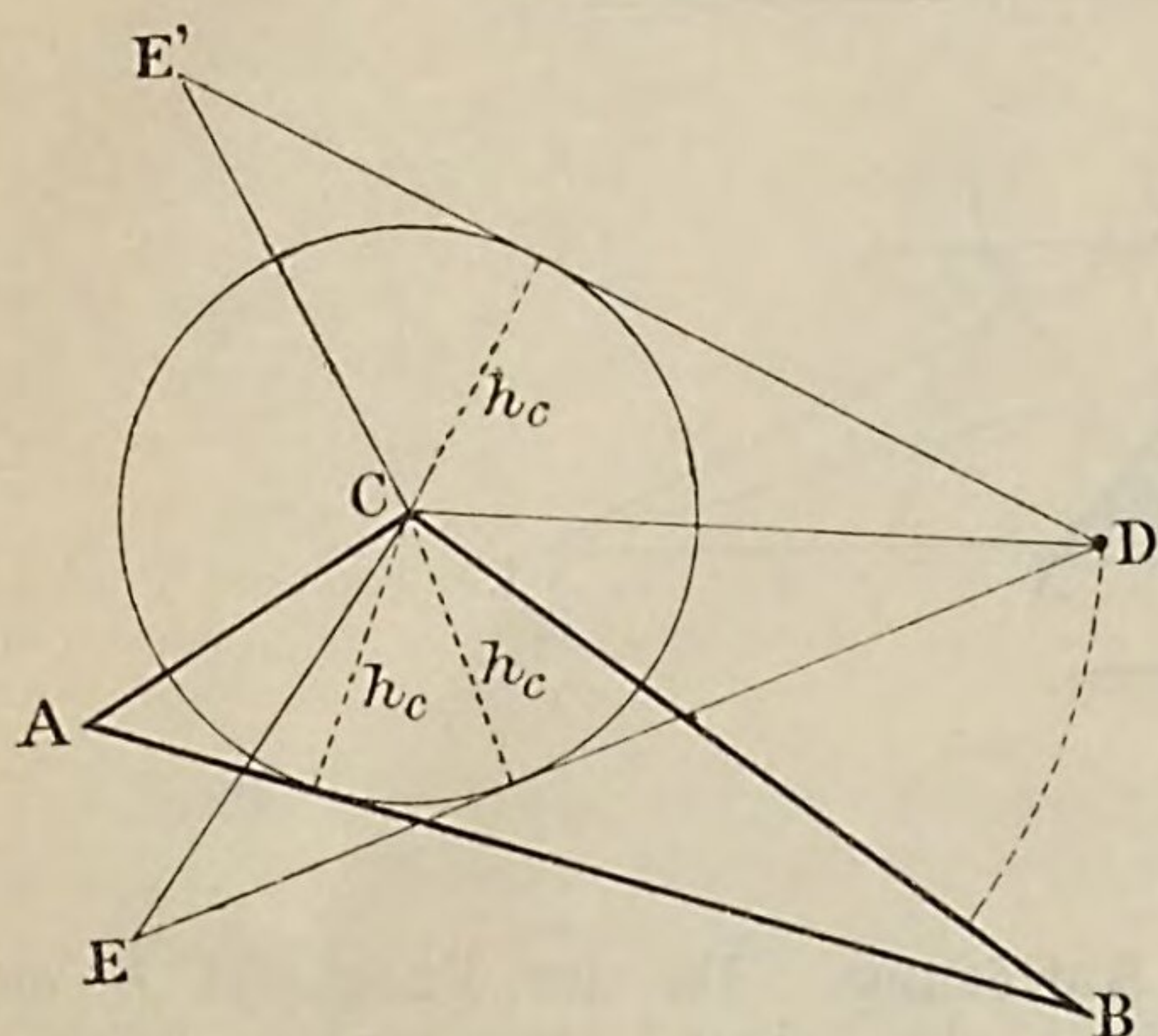
Auflösung. Alle diese Dreiecke haben gleiche Grundseite und Spitze. Die Höhe ist also stets die Senkrechte von dieser Spitze auf die Grundseite. Nun ist aber die Senk-

Erkl. 303. Eine Anwendung dieses Satzes findet sich in der folgenden Aufgabe. Man kann nämlich die gegebene Grundseite an jedem beliebigen Punkte irgend einer Tangente antragen.

rechte vom Kreismittelpunkt auf die Tangente stets Radius, also sind auch alle diese Höhen gleichlang. Daher haben diese Dreiecke gleiche Grundseite und Höhe, also gleichen Inhalt.

Aufgabe 254. Man soll einen Eckpunkt B eines Dreiecks an einen beliebig gegebenen Punkt D verlegen, während eine andere Ecke C und deren zugehörige Höhe h_c beibehalten bleibt.

Figur 81.



Auflösung. Wenn Ecke C und die Höhe h_c beibehalten werden soll, so muss auch beibehalten bleiben die Grösse der Grundseite und der Abstand derselben von der Gegenecke C . Daher bleibt die Grundseite Tangente an den mit Radius h_c um C beschriebenen Kreis.

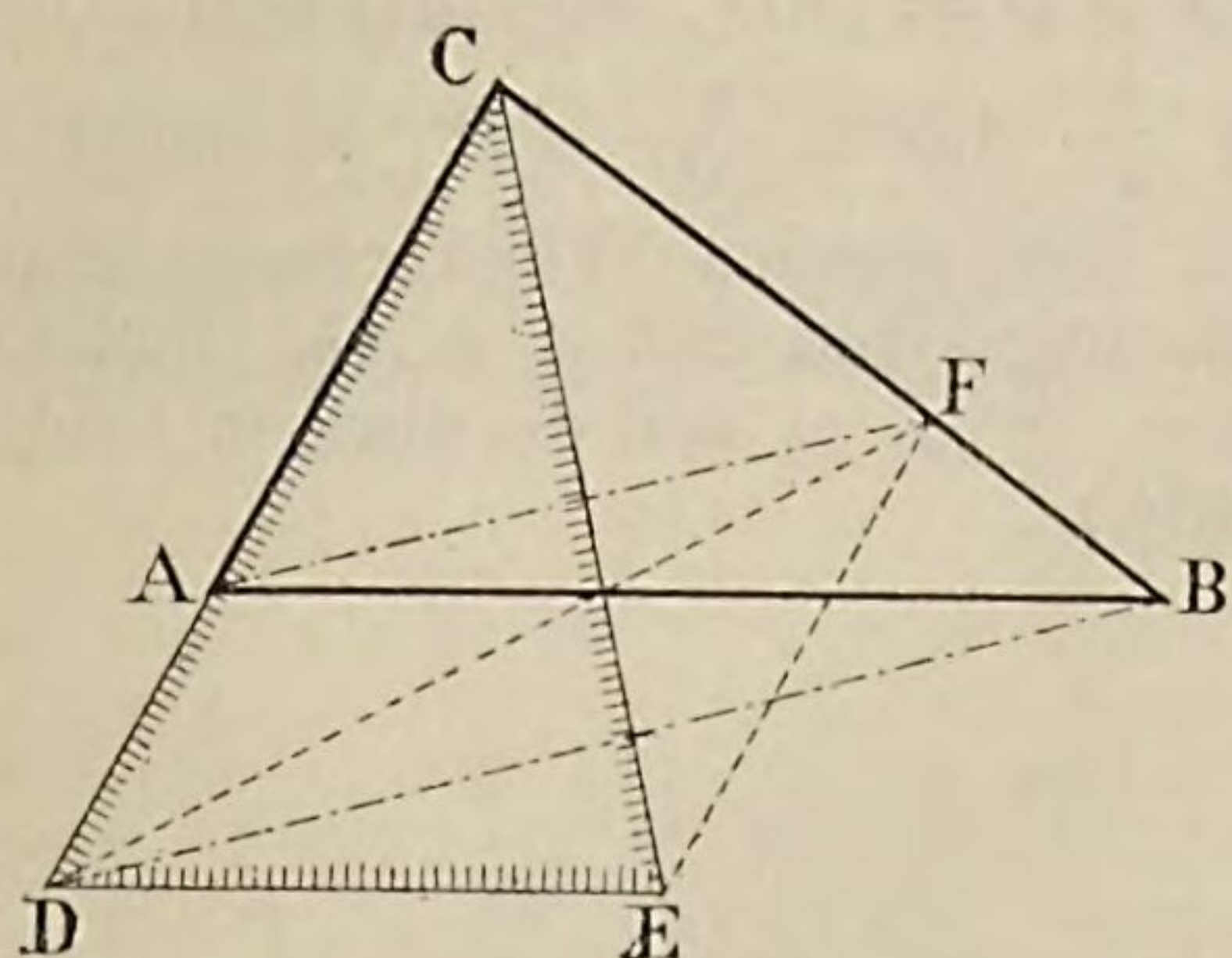
Soll also Ecke B nach D kommen, so zieht man die Tangenten DE und DE' an den Kreis um C , macht $DE = DE' = AB$, und erhält so die Dreiecke:

$$DEC = DE'C = BAC.$$

Erkl. 304. Ausser der Seite AB wird im allgemeinen keine andere Seite beibehalten, es ist also (wie durch das Kreisbögen in Figur 81 angedeutet) $CD < CB$, $CA < CE$. Nur wenn etwa D auf dem konzentrischen Kreise durch B liegen würde, müsste mit $CD = CB$ auch $CE = CA$ werden. Dann würde auch die Konstruktion einfach zur Drehung des Dreiecks ABC .

Aufgabe 255. Man soll eine Seite eines Dreiecks unter Festhaltung der Gegenecke sich selbst parallel nach aussen verschieben.

Figur 82.

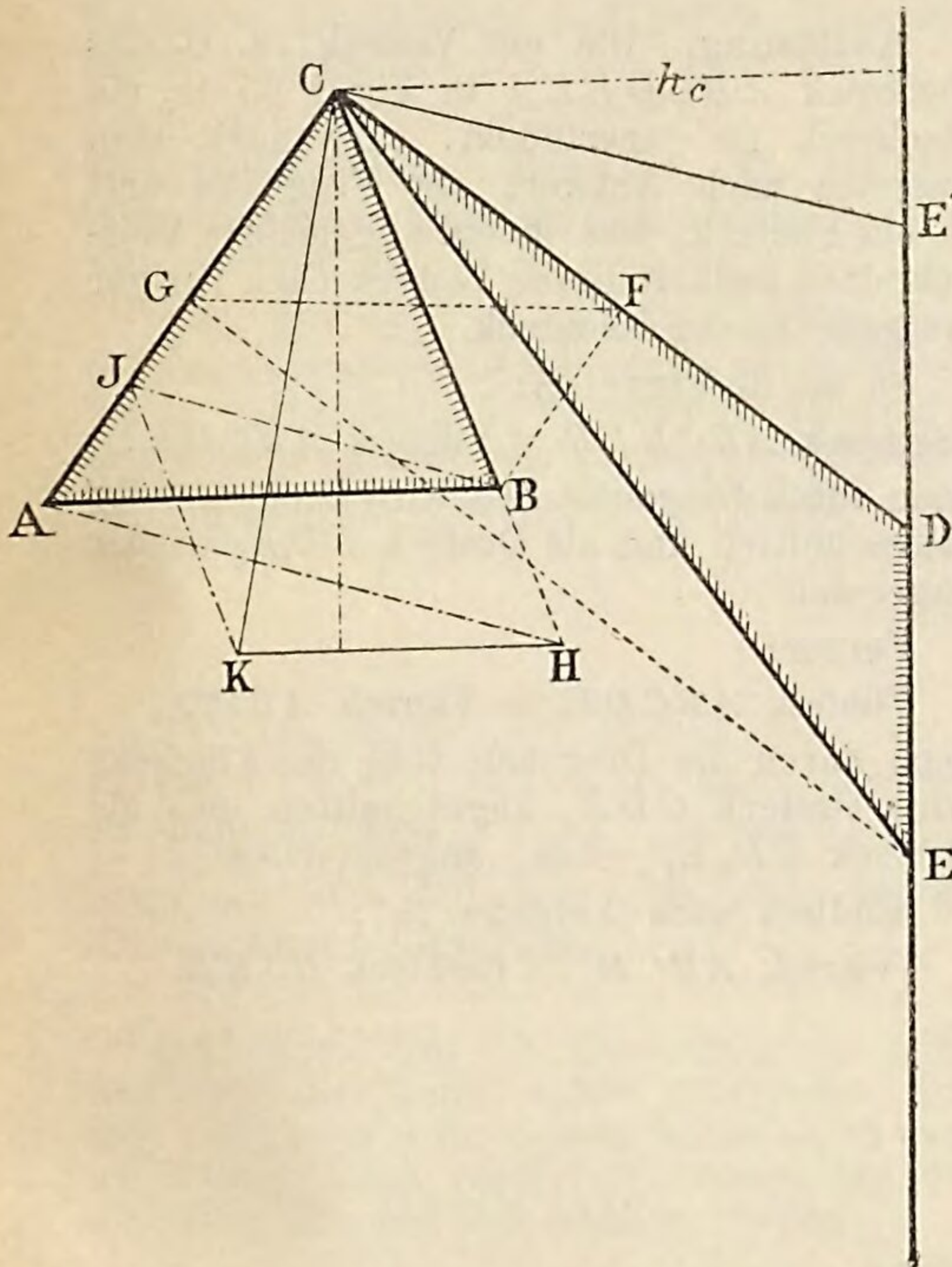


Auflösung. Die Auflösung dieser Aufgabe lässt sich bewerkstelligen durch zweimalige Anwendung der Antwort der Frage 73. Ist nämlich DE die vorgeschriebene Richtung der neuen Grundseite, so verlege man zunächst die Ecke A des Dreiecks ABC nach dem Schnittpunkte D der Richtungen CA und DE . Dadurch entsteht das Dreieck $CDF = CBA$. Verwandelt man dann noch den Winkel CDF in Winkel CDE , so ist das neuentstehende Dreieck $CDE = CDF = ABC$.

Erkl. 305. Die Aufgabe ist dieselbe, als ob unter Beibehaltung einer Ecke und der Richtung der zugehörigen Höhe die Länge dieser Höhe verändert werden sollte. Man kann die Aufgabe noch dadurch beschränken, dass die Lage der Ecke E auf ihrer Linie nicht willkürlich ist, sondern einen beliebig gegebenen Anfangspunkt erhält.

Aufgabe 256. Man soll einen Eckpunkt B eines Dreiecks an einen beliebig gegebenen Punkt D verlegen, während eine andere Ecke C beibehalten und die durch D gehende Seite auf gegebener Linie liegen soll.

Figur 83.



Auflösung. 1) Wenn die Linie durch D gegeben ist, auf welcher die Gegenseite von C liegen soll, so kennt man auch den Abstand, also h_c . Man kann also nach Antwort der Frage 70 oder etwa nach voriger Aufgabe 255 das gegebene Dreieck ABC in ein solches verwandeln, welches diese neue Höhe h_c besitzt, und die so gefundene neue Grundseite HK von D aus rechts oder links als DE antragen.

2) Man kann dieselbe Aufgabe auch lösen durch dreimalige Anwendung der Antwort der Frage 73: Erst Winkel ACB ändern in ACF , dann Seite CF in CD , endlich den entstehenden Winkel CDG in Winkel CDE .

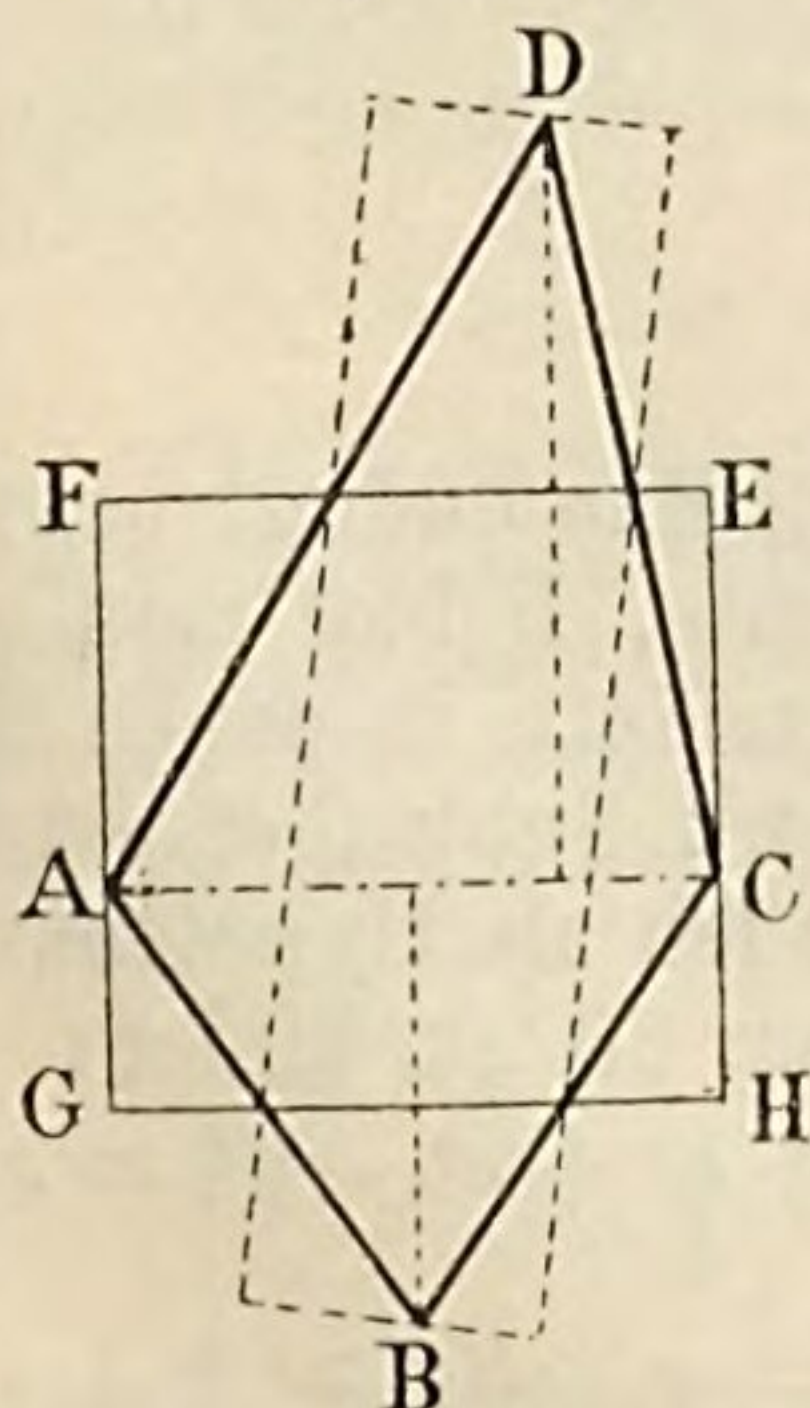
Erkl. 306. Die vorliegende Aufgabe bildet eine Verallgemeinerung der vorhergehenden, indem die Lage der neuen Grundseite nicht mit der vorherigen parallel, sondern beliebig gewählt ist.

Erkl. 307. In Figur 83 sind beide obenstehenden Ausführungsarten dargestellt, und dieselben führen zum gleichen Dreieck CDE :

- 1) $ABC = CHJ = CHK = CDE = CDE'$,
- 2) $ABC = AFC = CDG = CDE = CDE'$

Aufgabe 257. Ein beliebiges Viereck als Rechteck darzustellen.

Figur 84.



Erkl. 308. Statt mit der Diagonale AC hätte die Konstruktion auch mit der andern Diagonale BD gemacht werden können.

Auf dieselbe Weise kann auch jedes beliebige Rechteck oder Quadrat selbst wieder in Gestalt

Auflösung. Zieht man eine Diagonale, sowie die Mittelparallelen der beiden dadurch abgeschnittenen Dreiecke, so ist das Viereck gleichgross mit dem Rechteck, welches aus diesen beiden Parallelen und den im Endpunkte der Diagonale errichteten Senkrechten gebildet ist.

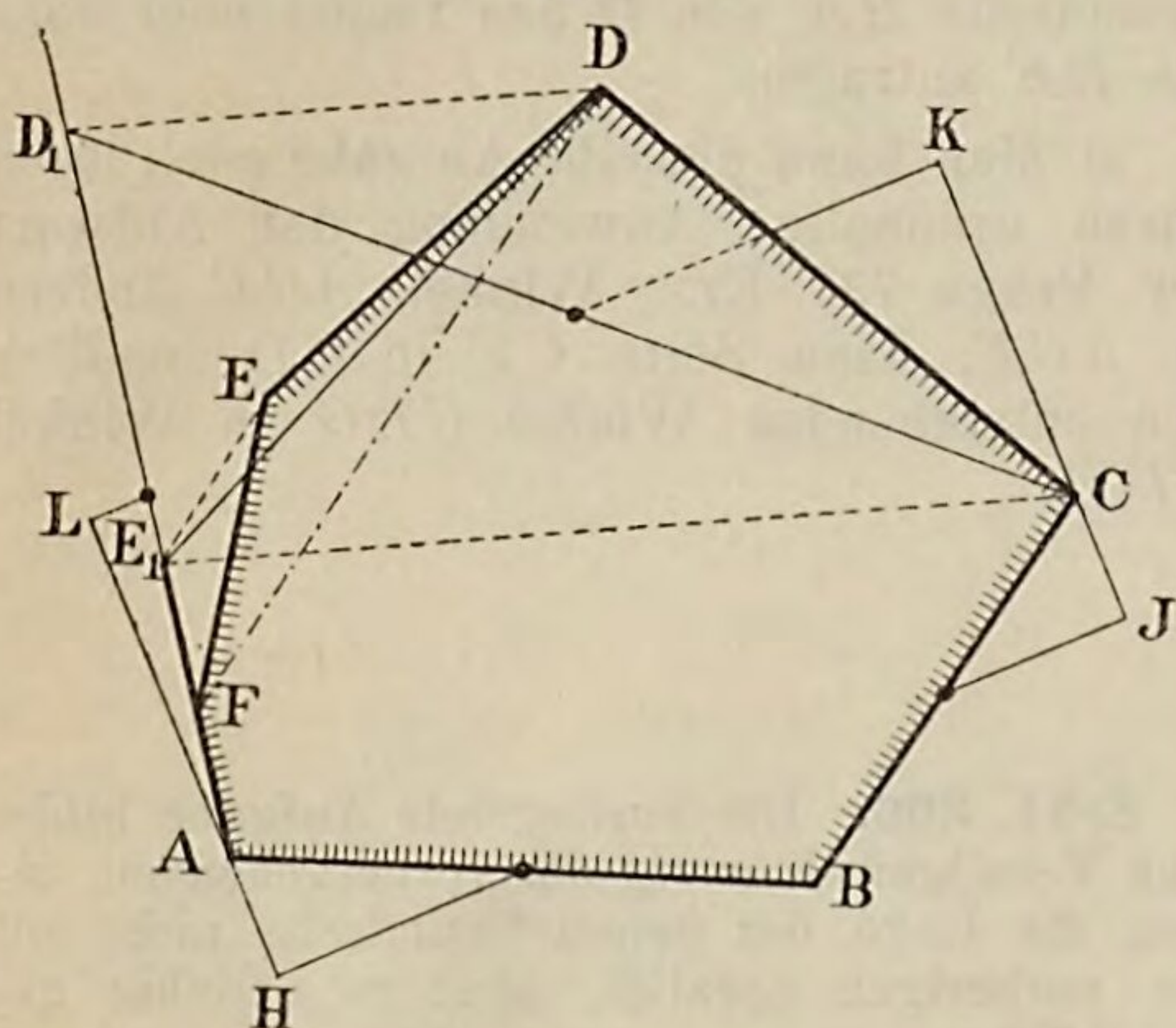
Denn da EF in Figur 84 die Seiten AD und CD halbiert, so wird auch die Höhe von D auf AC halbiert, also hat Rechteck $ACEF$ gleiche Grundseite und halbe Höhe wie Dreieck ACD , folglich ist $ACEF = ACD$. Ebenso wird $ACHG = ACB$, also durch Addition:

$$\text{Viereck } ABCD = \text{Rechteck } EFGH.$$

eines andern Rechtecks dargestellt werden. Ein Quadrat entsteht nach dieser Konstruktion nur dann, wenn die Summe der beiden Höhen der Teildreiecke gleich dem doppelten der Diagonale AC wird. (Siehe das so gewählte Beispiel in Figur 84.)

Aufgabe 258. Ein beliebig gegebenes Vieleck soll in die Gestalt eines Rechtecks gebracht werden.

Figur 85.

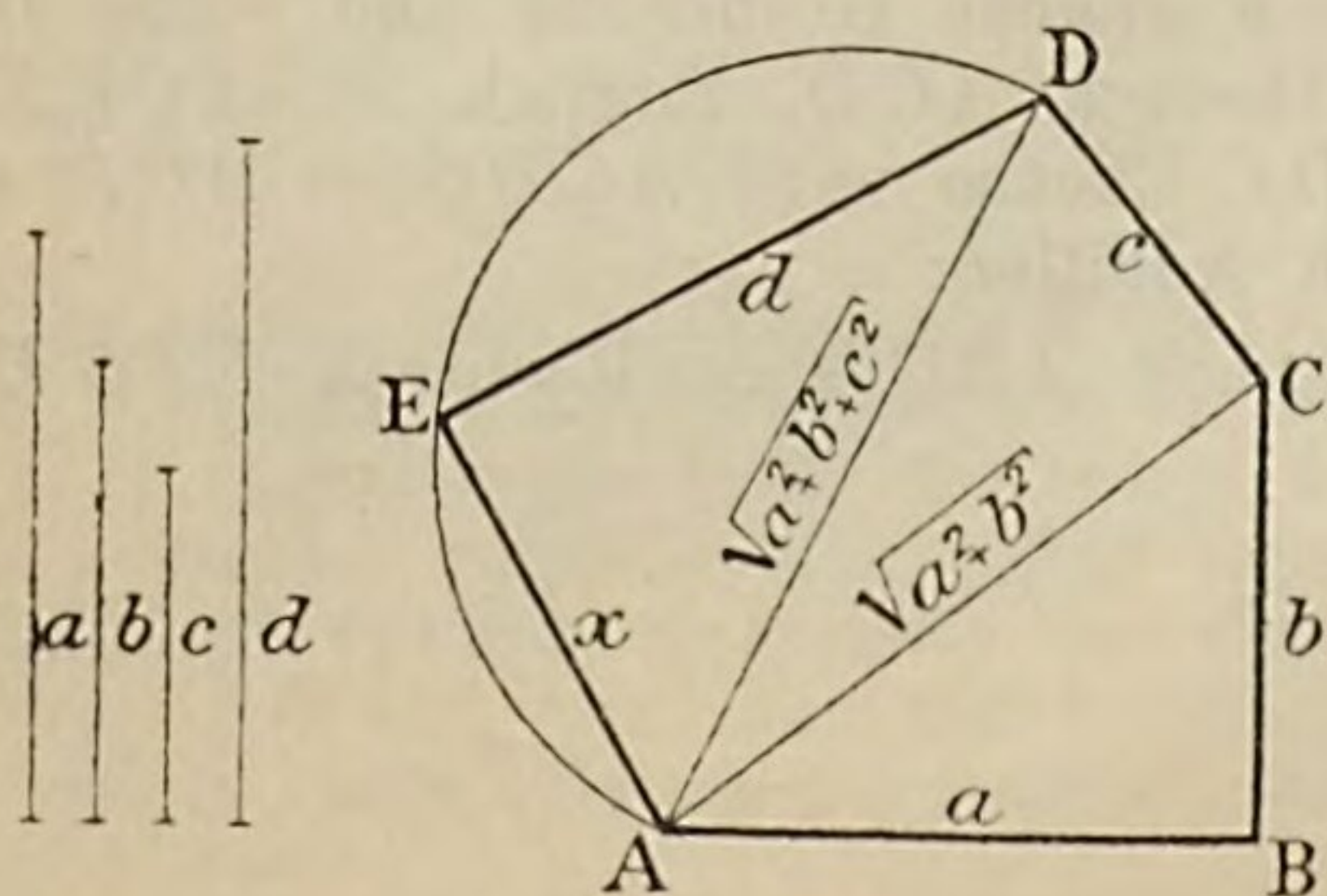


Erkl. 309. Man könnte auch statt der Anwendung der vorigen Aufgabe das Viereck $ABCD_1$ erst noch verwandeln in ein Dreieck ABC_1 , dieses in ein rechtwinkliges Dreieck und letzteres nach Antwort der Frage 70 in ein Rechteck von gleicher Grundseite und halber Höhe.

Erkl. 310. Bei der Ausführung nebenstehender Aufgabe besteht vielfache Willkür in der Wahl der Verlegung: Das Sechseck hat neun Diagonalen, deren jede zweifache Verschiebung liefert, nämlich nach der Verlängerung der einen oder der andern Seite. Das Fünfeck wieder hat fünf Diagonalen, deren jede wieder zweifache Verschiebung gestattet u. s. w.

Aufgabe 259. Die Summe bzw. Differenz mehrerer Quadrate soll als ein Quadrat dargestellt werden.

Figur 86.



Auflösung. Um ein Vieleck, z. B. das Sechseck $ABCDEF$ in Figur 85 in ein Rechteck zu verwandeln, verwandelt man dasselbe nach Antwort der Frage 74 erst in ein Fünfeck, dies in ein allgemeines Viereck, dann endlich dieses Viereck nach voriger Aufgabe in ein Rechteck.

So ist in Figur 85:

Sechseck $ABCDEF =$ Fünfeck $ABCDE_1$, denn durch Diagonale DF wird Dreieck DFE abgeschnitten und als Dreieck FDE_1 wieder angesetzt.

Ferner:

Fünfeck $ABCDE_1 =$ Viereck $ABCD_1$, denn durch die Diagonale CE_1 des Fünfecks wird Dreieck CDE_1 abgeschnitten und als Dreieck CD_1E_1 wieder angesetzt.

Endlich nach Aufgabe 257:

Viereck $ABCD_1 =$ Rechteck $HJKL$.

Auflösung. Man addiert bzw. subtrahiert je zwei Quadrate, indem man rechtwinklige Dreiecke konstruiert, in denen die Seiten der Summanden bzw. Subtrahenden als Katheten, die der Minuenden als Hypotenusen auftreten. So sei in Figur 86 zu bilden:

$$a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = x^2.$$

Dabei ist:

$$AB = a, \quad BC = b \perp AB,$$

also:

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2.$$

Ferner:

$$CD = c \perp AC,$$

also:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Erkl. 311. Die Konstruktion hätte auch stückweise durchgeführt werden können, indem man einzeln gebildet hätte:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \text{ und } \sqrt{c^2 - d^2},$$

um so durch Addition der Quadrate dieser Strecken x^2 wieder zu finden. Auch $a^2 + c^2$ und $b^2 - d^2$ oder andere Gruppierungen führen zum Ziele. Eine besondere Anwendung der fortlaufenden Konstruktion in Figur 86 findet man später in Erkl. 329.

Endlich mittels des Halbkreises über AD wird:

$$DE = d \perp AE,$$

also:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 - d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d^2.$$

Aufgabe 260. Man soll die Hälfte eines Quadrats als Quadrat bilden.

Erkl. 312. Man konnte auch das Quadrat a^2 halbieren mittels irgend einer durch seinen Mittelpunkt gehenden Linie und das so als Hälfte entstehende Dreieck oder Rechteck oder Trapez nach früheren Aufgaben in ein Quadrat verwandeln.

Auflösung. Zeichnet man über der Quadratseite a als Hypotenuse ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck, so erfüllt dessen Schenkel x die Bedingung:

$$x^2 + x^2 = a^2,$$

also:

$$x^2 = \frac{1}{2} a^2.$$

Es ist also die gesuchte Strecke x die Hälfte der Diagonale des gegebenen Quadrates a^2 .

Aufgabe 260 a. Man soll das n -fache bzw. den n ten Teil eines Quadrats wieder als Quadrat darstellen.

Erkl. 313. Für die Darstellung des n ten Teils hat man keine andere Ausführung, dagegen kann das n -fache (oder insbesondere auch die Hälfte) durch wiederholte Anwendung der Aufgaben 259 und 260 erhalten werden.

Auflösung. Man multipliziere bzw. dividiere die eine Seite des Quadrats mit der Zahl n und erhält so ein Rechteck von n facher bzw. $\frac{1}{n}$ facher Grösse. Dieses Rechteck verwandele man nachträglich wieder in ein Quadrat.

Aufgabe 261. Von einem Geländestück von 80 m Länge und 30 m Breite muss das vordere Ende bis auf 20 m Tiefe zu einer Strassenanlage abgetreten werden gegen Entschädigung durch einen gleichgrossen Streifen längs der übrigbleibenden Seitengrenze. Wie breit wird dieser?

Erkl. 314. Die Konstruktion kann nach irgend einer der Methoden für Verwandlung von Rechtecken geschehen, also nach Antwort der Frage 78 oder 66, oder nach der Methode der Ergänzungsparallelogramme, oder durch Zerlegung in Dreiecke u. s. w.

Auflösung. Das abzutretende Stück bildet ein Rechteck von 30 m und 20 m Seite, und soll verwandelt werden in ein Rechteck von $80 - 20 = 60$ m Seite. Dann ist die zweite Seite dieses Rechtecks die gesuchte Breite x des zuzufügenden Stückes. Da also $20 \cdot 30 = 60 \cdot x$, so muss $x = 10$ m werden.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 262. Ein Dreieck zu verwandeln in ein solches, welches doppelte Grundseite und zugleich doppelt so grossen Gegenwinkel hat.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 249.

Aufgabe 263. Zwei Dreiecke zu einem Dreieck zu addieren.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 250 und 251.

Aufgabe 264. Ein Parallelogramm von einem andern zu subtrahieren.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 250 und 251.

Aufgabe 265. Ein Dreieck unter Beibehaltung der Seite c und der anliegenden Höhe h_a zu verwandeln in ein anderes mit gegebener Höhe h_c .

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 252.

Aufgabe 266. Man soll ein Dreieck unter Beibehaltung der Spitze in ein gleichschenkliges verwandeln.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 253 und 254.

Aufgabe 267. Eine Dreiecksseite nach der Gegenecke hin parallel zu verschieben.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 255.

Aufgabe 268. Eine Dreiecksseite unter Beibehaltung der Gegenecke einer gegebenen Richtung parallel zu machen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 256.

Aufgabe 269. Ein Rhombus in ein Rechteck von der Länge einer Diagonale zu verwandeln.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 257.

Aufgabe 270. Ein Fünfeck in ein Dreieck zu verwandeln.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 258.

Aufgabe 271. Ein Siebeneck als Rechteck darzustellen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 258.

Aufgabe 272. Ein Dreieck in ein Rhombus zu verwandeln, so dass eine Dreiecksseite Diagonale wird.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Antwort der Frage 69.

Aufgabe 273. Einen Eckpunkt eines Dreiecks in einen gegebenen Punkt innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks zu verlegen unter Beibehaltung der Richtung und eines Endpunkts der Gegenseite.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Antwort der Fragen 70 und 73.

Aufgabe 274. Ein Parallelogramm in ein anderes mit gegebenen Diagonalen zu verwandeln.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Antwort der Fragen 70 und 73.

Aufgabe 275. Ein gegebenes Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 261 und Antwort der Frage 76.

Aufgabe 276. Ein gegebenes Parallelogramm in ein Quadrat zu verwandeln.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 261 und Antwort der Frage 76.

Aufgabe 277. Ein beliebiges Viereck oder Fünfeck als Quadrat darzustellen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 261 und Antwort der Frage 76.

Aufgabe 278. Die Summe oder Differenz zweier beliebigen Figuren: Dreieck, Viereck u. s. w. als Quadrat darzustellen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 261 und Antwort der Frage 76.

8) Aufgaben über Figurenteilung.

(Zu Abschnitt 8.)

a) Gelöste Aufgaben.

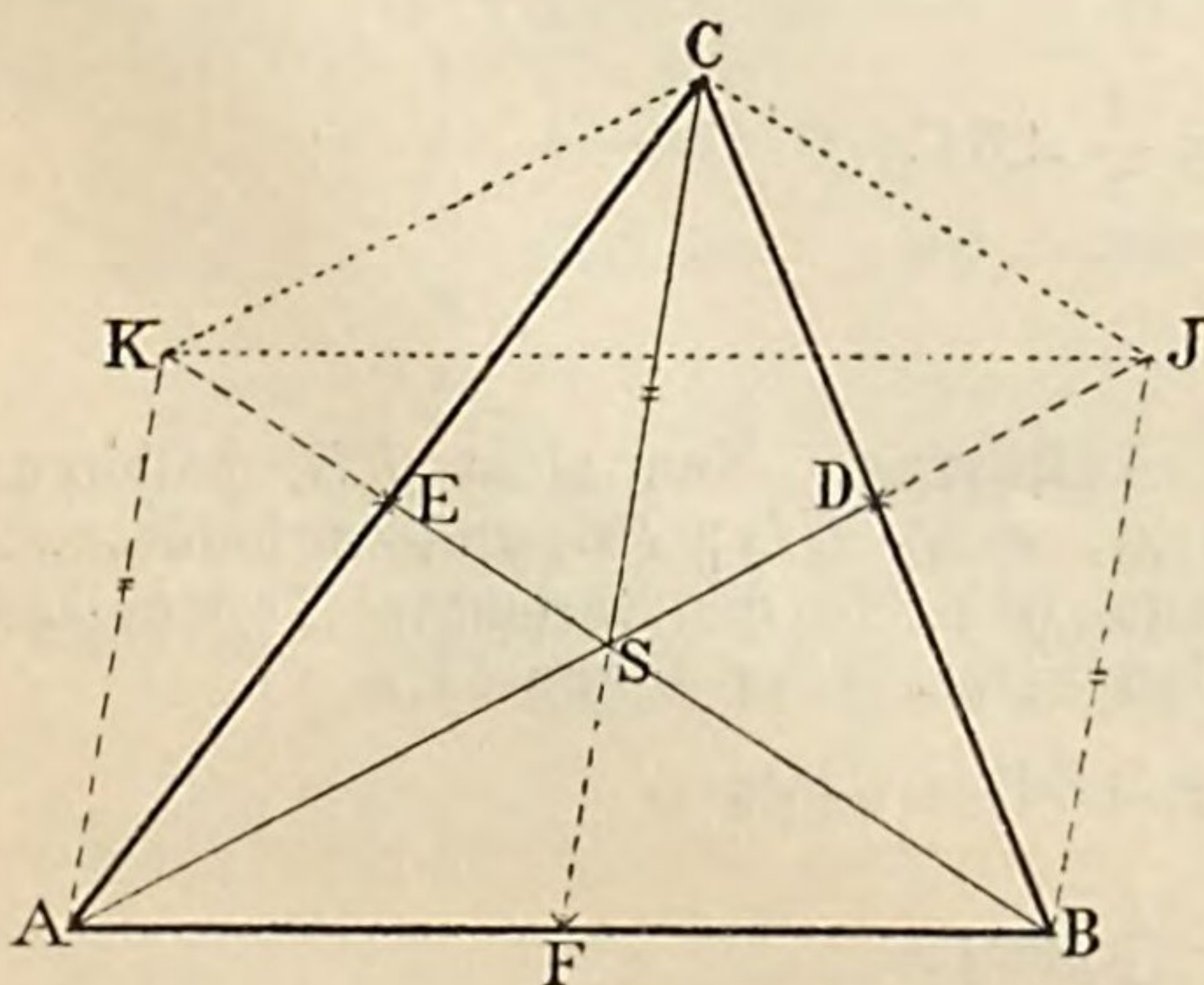
Aufgabe 279. Wie wird ein Parallelogramm durch die Diagonalen geteilt?

Auflösung. Das Parallelogramm wird durch die Diagonalen in vier inhaltsgleiche Dreiecke geteilt, denn dieselben haben sämtlich gleiche Seiten (die Diagonalenhälften) und gleichgrosse bzw. supplementäre Winkel (am Diagonalschnittpunkt).

Erkl. 315. Durch eine Diagonale entstehen zwei kongruente Hälften, die zweite Diagonale ist Mittellinie, also Flächenhalbierende jedes dieser Dreiecke.

Aufgabe 280. Wie wird ein Dreieck durch die Mittellinien geteilt?

Figur 87.



Auflösung. Das Dreieck wird durch die drei Mittellinien in sechs inhaltsgleiche Dreiecke zerlegt. Denn es ist in Figur 87 zunächst $AFS = BFS$ wegen gleicher Grundseite und Höhe, sodann ebenso $ASC = BSC$. Von diesen ist aber wieder jedes durch SD bzw. SE halbiert, also ist auch:

$$BSD = CSD = CSE = ASE = ASF = BSF = \frac{1}{6} \cdot ABC.$$

Man konnte auch erst die Gleichheit der Höhen von A und B auf CF nachweisen, daraus die Gleichheit der Höhen von D und E auf CS und so die Gleichheit der Dreiecke CDS und CES wegen gleicher Höhen und gleicher Grundseite CS .

Erkl. 316. Man kann nach diesem Beweise leicht von einem Dreieck herstellen die Fläche, welche gleich ist $\frac{1}{6} ABC$ oder:

$$\frac{1}{3} ABC = \frac{2}{6} ABC = ASB = BSC = CSA$$

$$\text{oder} = AFSE = BDSF = CESD.$$

(Daraus folgt einzeln wieder, dass jedes der Vierecke an einer Ecke des Dreiecks gleich ist dem Dreieck an der Gegenseite),

$$\frac{1}{2} ABC, \frac{2}{3} ABC = \frac{4}{6} ABC = ASCBA = BSACB = CSBAC$$

$$\text{oder} = AESDBA = BFSECB = CDSFAC.$$

Und endlich $\frac{5}{6} ABC$ durch Auslassung eines der Sechstel.

Aufgabe 281. In einem Dreieck einen Punkt zu suchen, dessen Verbindungslinien mit den Ecken das Dreieck in drei gleiche Teile teilen.

Auflösung. Nach voriger Aufgabe ist dies der Schwerpunkt.

Aufgabe 282. Ein Dreieck in drei gleiche Teile zu teilen.

Auflösung. Man verbindet eine Ecke mit den Teilpunkten der Gegenseite in drei gleiche Teile.

Erkl. 317.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{3} \cdot h = \frac{1}{3} \left(\frac{g \cdot h}{2} \right) = \frac{1}{3} \cdot ABC.$$

Aufgabe 283. Ein Dreieck parallel einer Seite c zu halbieren.

Erkl. 318. Dreieck CFG und CBA haben gleiche Winkel; ihre Inhalte verhalten sich also nach Satz 19 wie $\overline{CF}^2 : \overline{CB}^2$. Nun ist:

$$\overline{CF}^2 = CE^2 = CB \cdot CD = CB \cdot \frac{CB}{2} = \frac{1}{2} CB^2.$$

Also:

$$\overline{CF}^2 : \overline{CB}^2 = 1 : 2.$$

Folglich auch:

$$CFG = \frac{1}{2} CBA$$

und

$$ABFG = ABC - CFG = ABC - \frac{1}{2} ABC = \frac{1}{2} ABC.$$

Aufgabe 284. Ein Dreieck von einem auf einer Seite b gelegenen Punkte P aus zu halbieren.

Erkl. 319. Da E Mittelpunkt von b ist, so ist:

$$BEC = \frac{1}{2} ABC = CED + DEB = CED + DEP = CPD,$$

also auch:

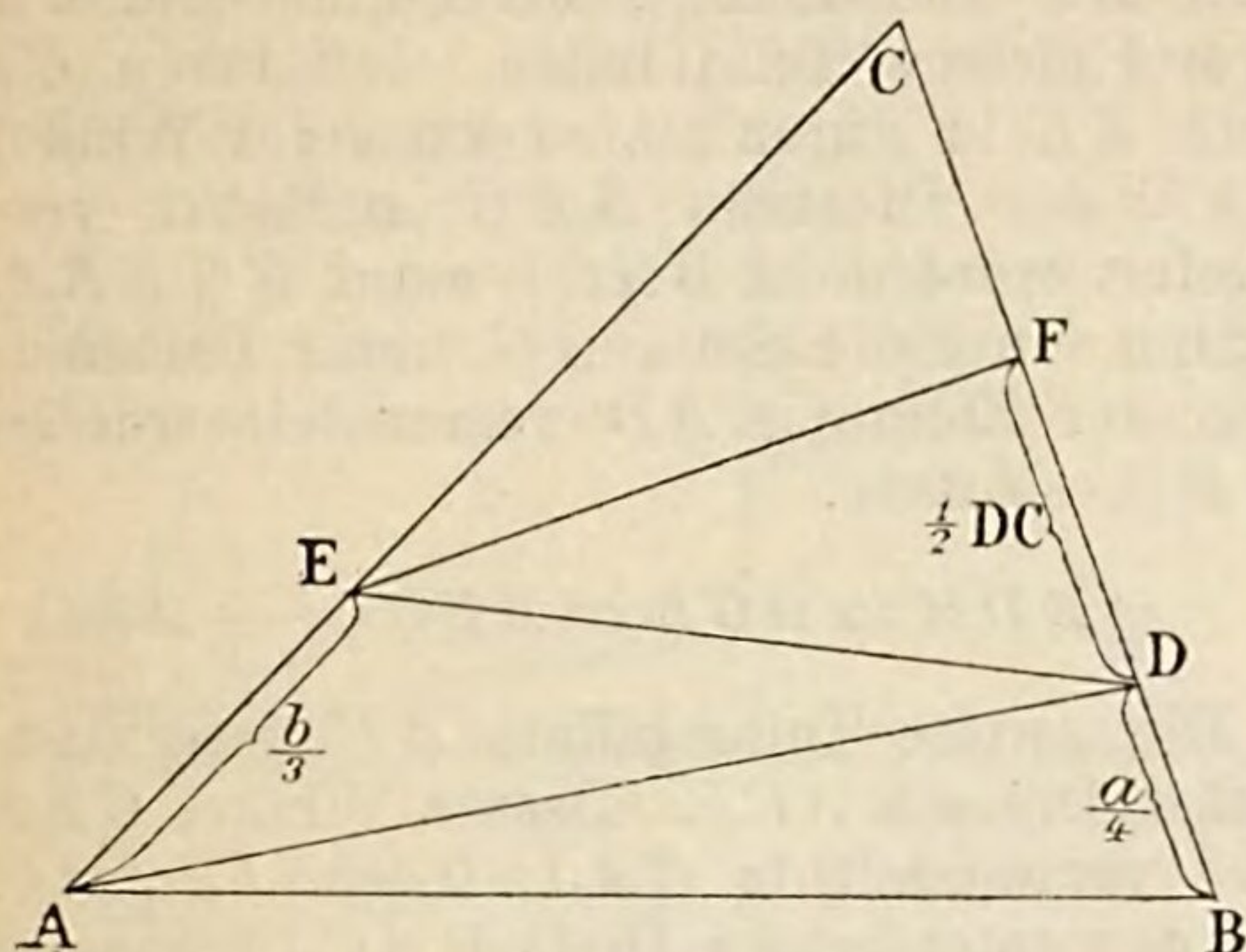
$$PDBA = ABC - CPD = ABC - \frac{1}{2} ABC = \frac{1}{2} ABC.$$

Auflösung. Man halbiert a (oder b) in D , schneidet durch die Mittelsenkrechte in D den Halbkreis über a in E , verbindet CE und trägt diese Strecke als CF auf a ab, zieht durch F die Parallele FG zu c , so ist dies die gesuchte Teilungslinie (vgl. Fig. 60).

Auflösung. Man zieht PB , halbiert b in E , zieht $ED \parallel PB$ und verbindet PD . Dann ist PD die verlangte Teilungslinie. (Man vergl. hierzu Figur 61.)

Aufgabe 285. Ein Dreieck durch einen von A ausgehenden Linienzug in n gleiche Teile zu teilen.

Figur 88.



Erkl. 320. In Figur 88 ist Teilung in vier gleiche Teile gewählt. Da $BD = \frac{a}{4}$, so ist:

$$ABD = \frac{ABC}{4}, \quad ADC = \frac{3}{4} ABC.$$

Da nun wieder $AE = \frac{b}{3}$, so ist:

$$ADE = \frac{1}{3} ADC = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} ABC = \frac{1}{4} ABC,$$

also:

$$EDC = \frac{1}{2} ABC.$$

Da ferner $DF = \frac{1}{2} DC$, so ist:

$$EDF = \frac{1}{2} EDC = \frac{1}{4} ABC.$$

Folglich:

$$ABD = ADE = EDF = FEC = \frac{1}{4} ABC.$$

Aufgabe 286. Man soll ein Dreieck teilen im Verhältnis $(n-2):n$.

Erkl. 321. In Figur 88 ist CB in vier, CA in drei Teile geteilt, also:

$$n = 4, \quad n-2 = 2,$$

$$ABDE = \frac{2}{4} ABC = \frac{1}{2} ABC,$$

$$CED = \frac{n-2}{n} ABC = \frac{1}{2} ABC.$$

Allgemein wird immer:

$$ABD = \frac{1}{n} ABC, \quad ADE = \frac{1}{n} ABC,$$

also:

$$ABDE = \frac{2}{n} ABC,$$

$$CED = ABC - ABDE = \frac{n-2}{n} ABC.$$

Auflösung. Damit die von A ausgehende Linie AD das Dreieck $ABD = \frac{1}{n} ABC$ abschneide, muss $BD = \frac{1}{n} BC$ sein; dadurch ist:

$$ADC = ABC - ABD = \frac{n-1}{n} ABC.$$

Damit nun die von D ausgehende Linie DE wieder das Dreieck $ADE = \frac{1}{n} ABC$ abschneide, muss $ADE = \frac{1}{n-1} \cdot ADC$ werden, also muss $AE = \frac{1}{n-1} \cdot AC$ sein.

Ebenso wird $EDF = \frac{1}{n} ABC$, wenn $DF = \frac{1}{n-2} \cdot DC$ wird, denn:

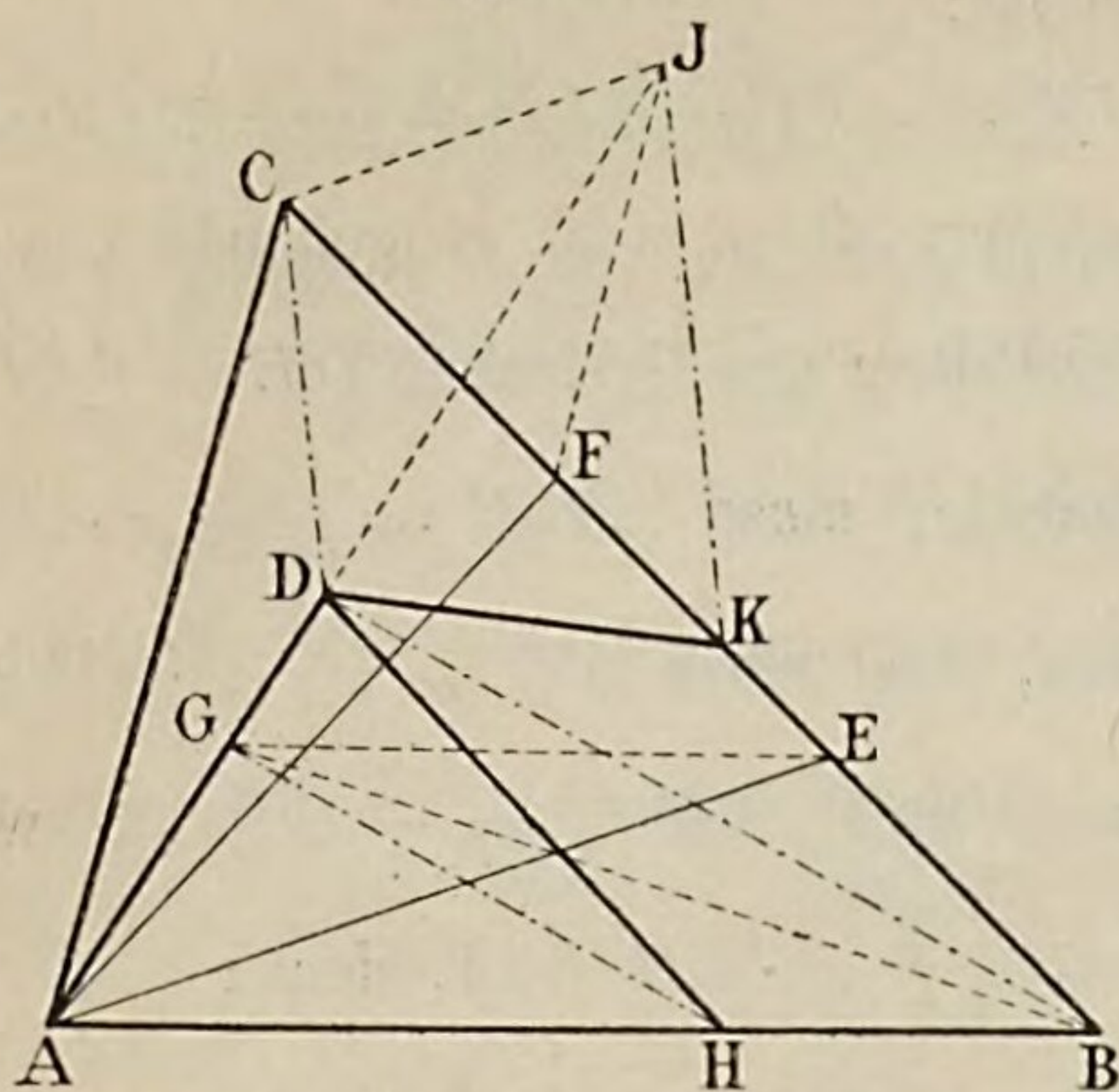
$$EDC = \frac{n-2}{n} ABC.$$

Man teile also der Reihe nach die auf a und b erhaltenen Strecken in $n, n-1, n-2, n-3 \dots$ Teile und verbinde jeden Teilpunkt mit dem nächstliegenden der andern Seite.

Auflösung. Nach voriger Aufgabe geschieht dies, indem man eine Seite in n , die andere in $n-1$ Teile teilt und die letzten Teilpunkte DE verbindet. Dann hat das Viereck $ABDE \frac{2}{n}$, das übrig gebliebene Dreieck $CED \frac{n-2}{n}$ der Gesamtfläche (vgl. Figur 88).

Aufgabe 287. Man soll ein Dreieck in drei gleiche Teile teilen durch Teilungslinien, welche von einem Punkte D im Innern ausgehen und von denen eine durch die Ecke A geht.

Figur 89.



Erkl. 322. Die erste Verwandlung ist die einfachere, wenn der Winkel BAE vergrößert wird, damit der Winkelschenkel auf AD kommt. Denn dabei fällt das erhaltene Teildreieck ganz innerhalb ABC .

Bei der zweiten Verwandlung dagegen, wo der Winkel CAF verkleinert werden muss, um seinen Schenkel auf AD fallen zu machen, ragt das entstehende Dreieck ACJ über ABC hinaus. Dabei muss dann erst wieder die Spitze J auf den Umrang des Dreiecks ABC nach K verbracht werden.

Erkl. 323. Die entstehenden Drittel des Dreiecks ABC sind:

- 1) Dreieck $ADH = \frac{1}{3} ABC$,
- 2) Viereck $HDKB = \frac{1}{3} ABC$,
- 3) Viereck $ADKCA$ mit einspringendem Winkel $D = \frac{1}{3} ABC$.

Aufgabe 288. Man soll von einem Dreiecke den n ten Teil abteilen durch eine Teilungslinie, welche von einem Punkte D im Innern ausgeht und nach einem gegebenen Punkte P auf einer Seite geht.

Auflösung. Man kann das Dreieck in drei Teile teilen durch die Linien von A nach den Teilpunkten, welche die Seite a in drei gleiche Teile teilen. Ist davon die erste AE in Figur 39, so kann der Winkel BAE des Dreiecks BAE zunächst verwandelt werden in BAG , wenn $EG \parallel BA$. Sodann kann die Seite AG unter Beibehaltung der Richtung AB verwandelt werden in AD , so dass:

$$\triangle ADH = AGB = AEB = \frac{1}{3} ABC.$$

Die zweite Teilungslinie AF liefert zunächst Dreieck ACF . Dessen Winkel CAF wird verwandelt in CAJ , indem $FJ \parallel AC$. Von dem entstehenden Dreieck ACJ schneidet man nun das bereits in passender Lage befindliche Stück ADC ab und verbringt die Spitze J des übrigen Dreiecks DCJ nach K , indem $JK \parallel CD$. Dann ist:

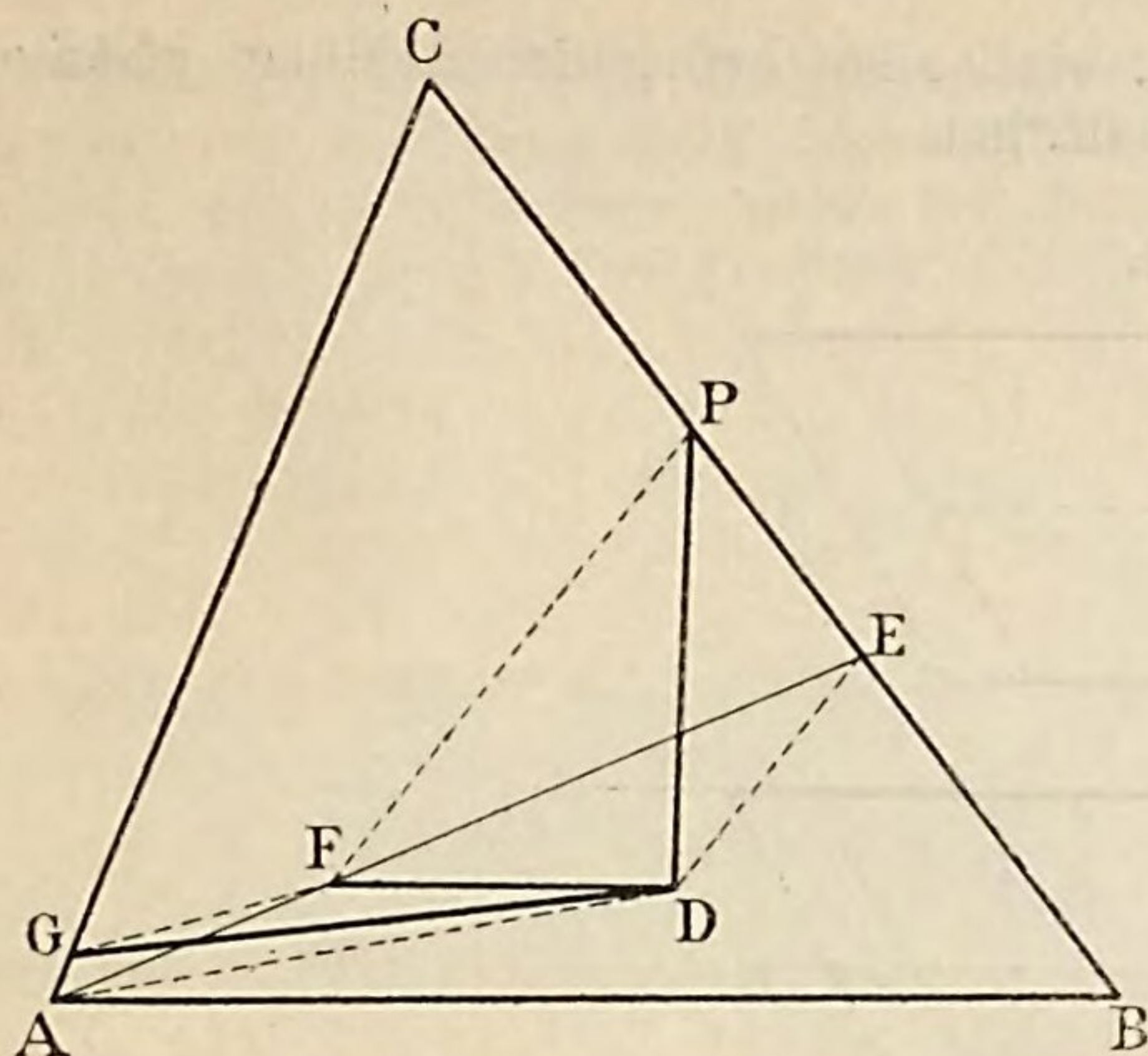
$$\begin{aligned} \frac{1}{3} ABC &= \triangle ACF = \triangle ACJ = ACD + CDJ \\ &= ACD + CDK = ADKCA. \end{aligned}$$

Das zwischen den Linien DH und DK verbleibende Stück $DHBKD$ muss nun als Rest zu den zwei erhaltenen Dritteln ebenfalls ein Drittel des Gesamtdreiecks sein.

Auflösung. Ist DP in Figur 90 die gegebene Strecke, so muss von D aus eine Linie gefunden werden, welche mit DP und dem Winkel β den verlangten Bruchteil abschneidet. Teilt man nun BC in n gleiche Teile und nennt E den bei B zunächst liegenden Teilpunkt, so ist:

$$ABE = \frac{1}{n} ABC.$$

Figur 90.



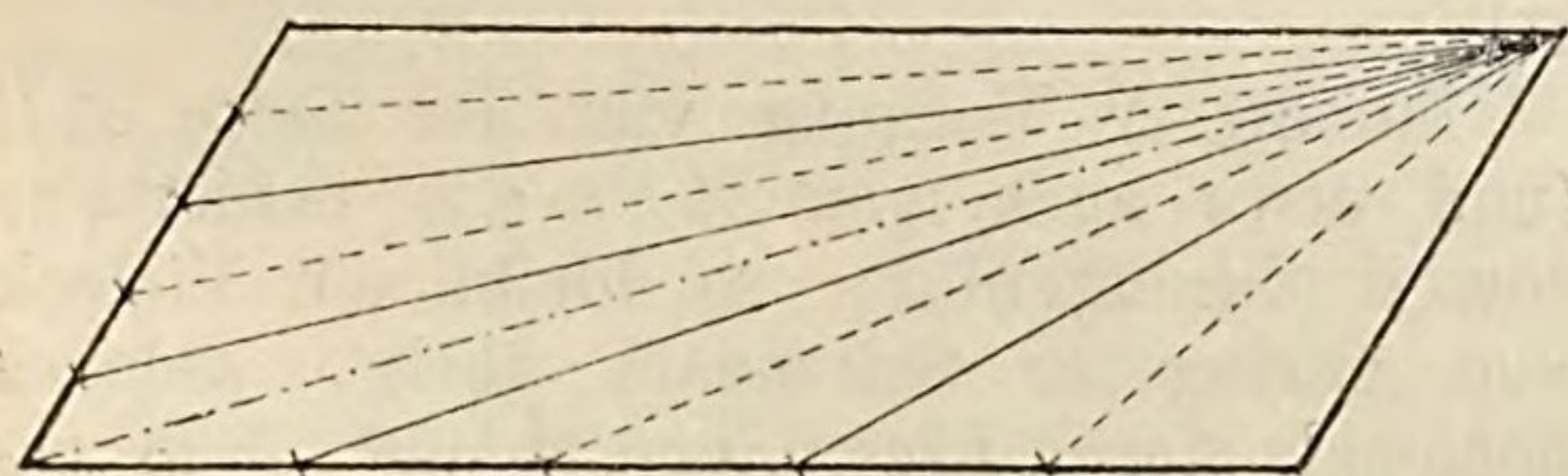
Erkl. 324. Man hat in Figur 90:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} ABC &= ABE = \text{Fünfeck } ABEDFA + \triangle DFE = \text{Fünfeck } ABEDFA + \triangle DEF \\ &= \text{Fünfeck } ABPDFA = \text{Viereck } ABPDA + \triangle ADF \\ &= \text{Viereck } ABPDA + \triangle ADG = \text{Fünfeck } ABPDGA. \end{aligned}$$

Die vorliegende Aufgabe ist ein besonderer Fall der allgemeinen Aufgabe, das $\triangle ABC$ durch $n-1$ an DP anschliessende Linien in n gleiche Teile zu teilen.

Aufgabe 289. Ein Parallelogramm von einer Ecke aus in n gleiche Teile zu teilen.

Figur 91.



Erkl. 325. In Figur 91 ist nur die Teilung in ungerade Anzahl (fünf) vorgezeichnet. Jedes der einzelnen Teildreieckchen ist $\frac{1}{10}$ des ganzen Parallelogramms, also gibt je das der Diagonale rechts und links anliegende Zehntel als Summe ebenfalls ein Fünftel des ganzen.

Aufgabe 290. Ein Parallelogramm in n gleiche Teile zu teilen.

Erkl. 326. Während der erste Teil nebenstehender Auflösung ohne weiteres klar ist, wird der zweite in Figur 92 dargestellt für $n=5$. Man sieht dabei, dass auch durch einen geschlossenen Linienzug Teilung stattfinden kann, auch wenn bei demselben ein Ausgangs- oder Zwischenpunkt fest gegeben ist. Nur kann dabei nötig werden, überschlagene Trapeze zu benutzen, deren einer Teil dann negativ anzusetzen wäre. Man kann aber auch diese letzte Linie verlegen, so dass sie am Schenkel endet.

Es muss also ABE verwandelt werden in eine Figur mit Winkel EPD und Seite PD . Zu dem Zwecke zieht man DE und parallel dazu PF . Dann ist:

$ABE = \text{Fünfeck } ABEDFA + \triangle DFE$,
und $DFE = DPE$, also:

$$ABE = \text{Fünfeck } ABPDFA.$$

Nun ist noch die gebrochene Linie DFA in eine Gerade zu verlegen, also Winkel DAF des Dreiecks zu verwandeln in DAC , indem $FG \parallel DA$ gezogen wird. Dann ist $ADF = ADG$, also:

$$\text{Fünfeck } ABPDGA = \triangle ABE = \frac{1}{n} ABC.$$

Auflösung. 1) Ist a eine gerade Zahl, so muss die Diagonale unter den Teilungslinien sein, also braucht nur noch jedes der Dreiecke in $\frac{n}{2}$ Teile geteilt zu werden.

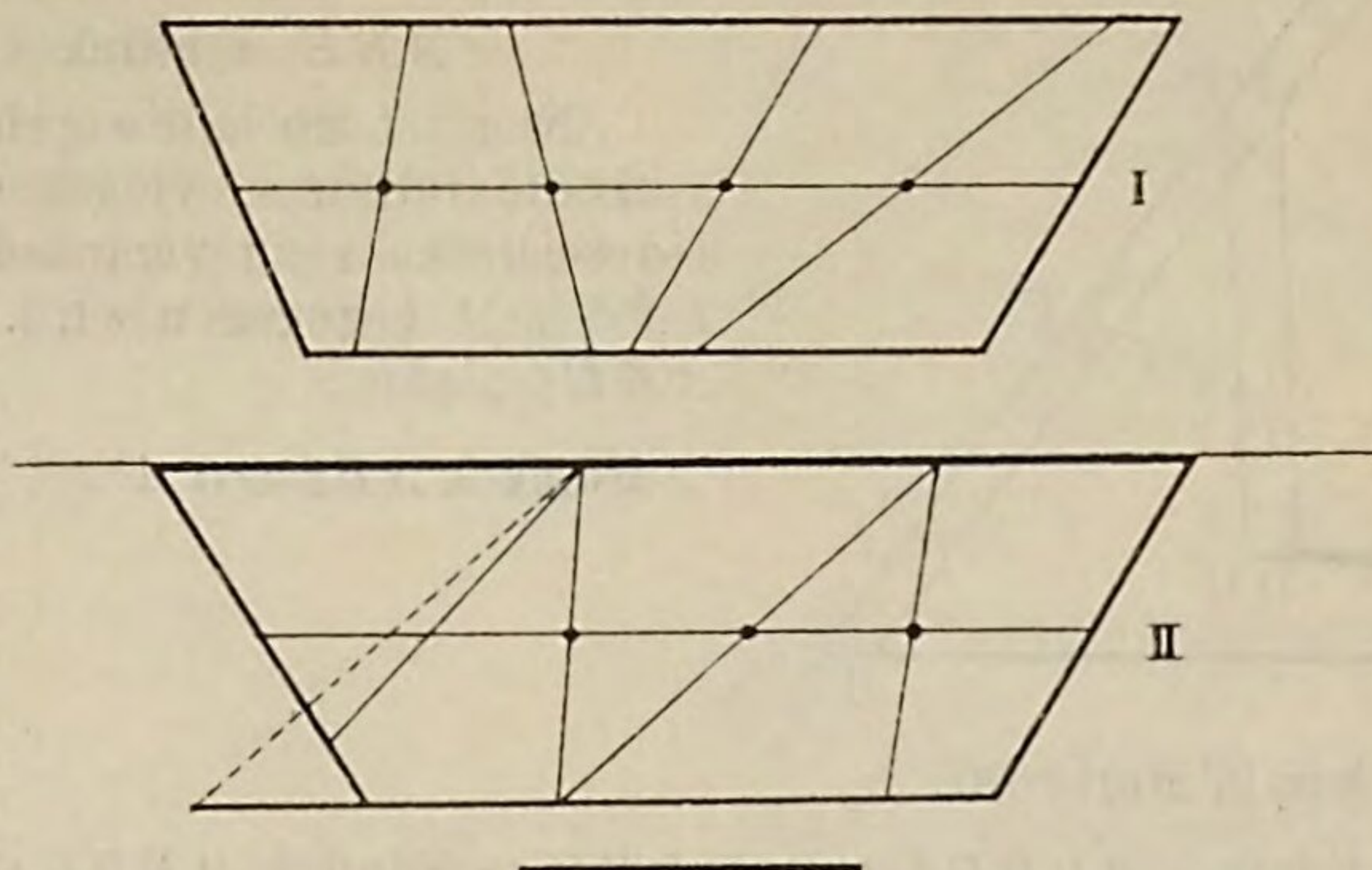
2) Ist n eine ungerade Zahl, so ist $2n$ eine gerade; teilt man also jedes der durch die Diagonale gebildeten Dreiecke in n gleiche Teile und nimmt je zwei benachbarte solcher Teile zusammen, so erhält man wieder die verlangte Teilung.

Auflösung. 1) Teilt man beide Grundseiten je in n Teile, so bilden die Verbindungslinien der Teilpunkte Trapeze, bei welchen die Summe der Grundseiten je $\frac{1}{n}$ der ganzen Summe bildet, also sind alle inhaltsgleich.

2) Teilt man die Mittellinie in n gleiche Teile und zieht durch dieselben beliebige Linien, die einander nicht innerhalb des Trapezes treffen, so bildet jedes Paar ein

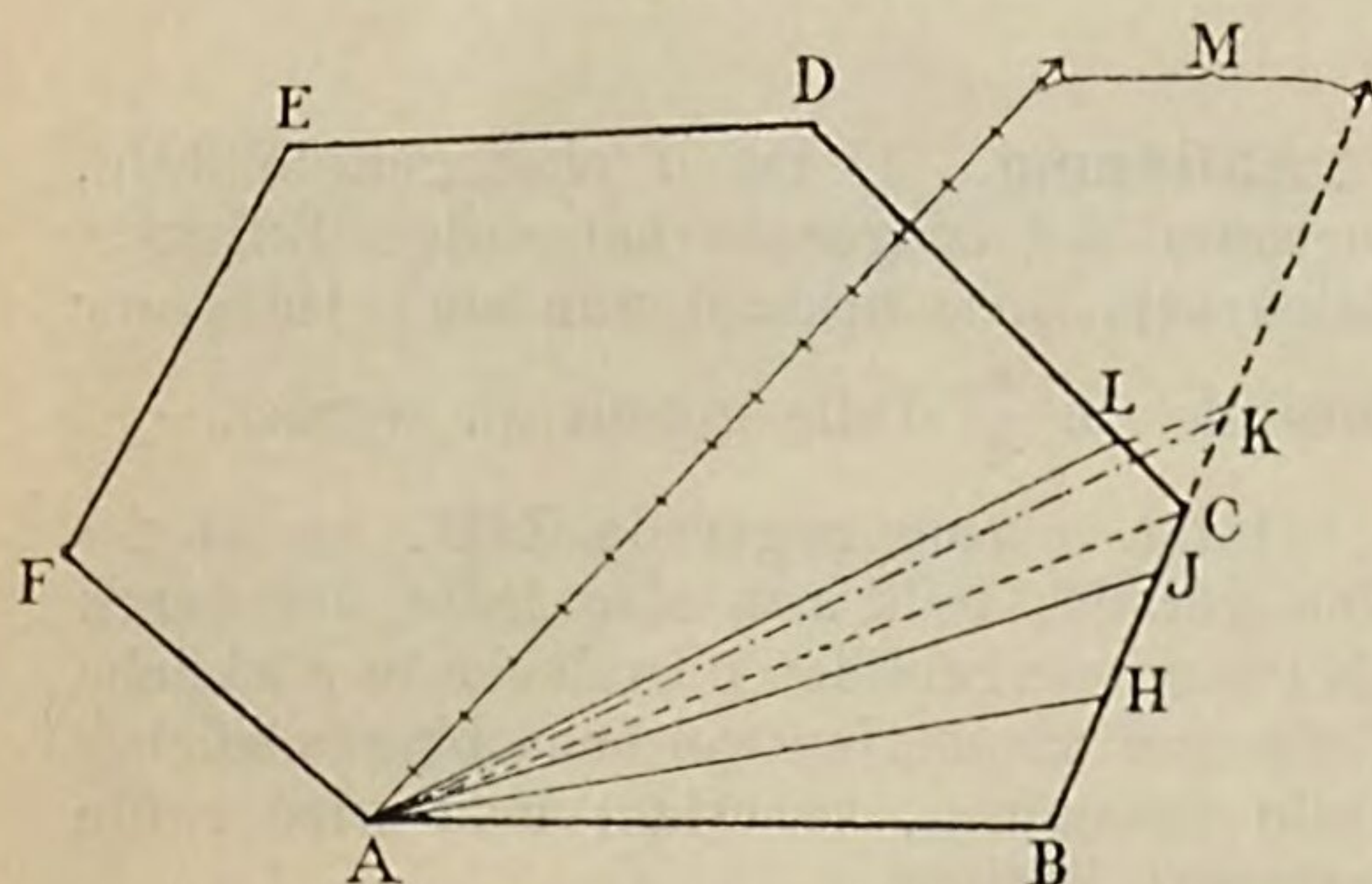
Trapez, dessen Mittellinie $\frac{1}{n}$ des ganzen ist, das also bei gleicher Höhe gleichen Inhalt hat.

Figur 92.



Aufgabe 291. Ein beliebiges Vieleck durch Linien aus einer Ecke A in n gleiche Teile zu teilen.

Figur 93.



Erkl. 327. In Figur 93 fallen die Teilungslinien AH und AJ in das Vieleck, also:

$$ABH = AHJ = \frac{1}{n} ABM = \frac{1}{n} ABCDEF.$$

AK trifft BM ausserhalb C , daher wird gesetzt:

$$\triangle AJK = \triangle AJC + \triangle ACK = \triangle AJC + \triangle ACL = \triangle AJCL,$$

indem $KL \parallel AC$. Also ist die nächste Teilungslinie AL statt AK , und Viereck:

$$AJCL = \triangle AJK = \frac{1}{n} ABCDEF.$$

Dann braucht das Vieleck $ALDEF$ nur noch in $n - 3$ Teile geteilt zu werden, oder in noch weniger, wenn man anderseits mit AFE ebenso verfährt, wie mit ABC .

Auflösung. Man verwandelt das Vieleck in ein Dreieck mit Spitze A und etwa der Richtung BC als Grundseite. Teilt man dann die erhaltene Strecke BM in n gleiche Teile, so sind Teilungslinien des Dreiecks von A nach diesen Teilpunkten auch Teilungslinien des Vielecks. Geht eine solche Teilungslinie über das Vieleck hinaus, so wird sie so verlegt, dass sie auf den Umring des Vielecks fällt.

Ist dieser Vorgang von der Seite AB (und etwa auch von AF) aus beiderseits soweit durchgeführt, so bleibt ein Vieleck von geringerer Seitenzahl übrig, welches nochmals durch Linien von A aus — in geringere Anzahl — zu teilen ist.

Aufgabe 292. Ein beliebiges Vieleck durch Linien von einem Punkte P des Umfanges aus in n gleiche Teile zu teilen.

Auflösung. 1) Die Aufgabe ist auf die vorige zurückgeführt, wenn man das Vieleck,

Erkl. 328. Sind einige Teilungen ausgeführt, so kann man wieder das übrig bleibende Vieleck wählen und dasselbe durch Linien von der erhaltenen Ecke P in die noch übrig gebliebene Anzahl Teile teilen.

statt als n -Eck, betrachtet als $n+1$ Eck, welches im Punkte P einen gestreckten Winkel hat.

2) Die Lösung besteht wieder darin, dass man das Vieleck verwandelt in ein Dreieck mit Spitze P und Grundseite in der Richtung einer der anstossenden Vielecksseiten, dann dieses Dreieck in n Teile teilt und die Teilungen desselben auf das Vieleck überträgt.

Aufgabe 293. Ein beliebiges Vieleck von einem gegebenen Punkte P im Innern aus durch Teilungslinien im Anschluss an eine der Lage nach gegebene erste Teilungslinie in n gleiche Teile zu teilen.

Auflösung. Man verwandelt wieder das ganze Vieleck in ein Dreieck mit dem gegebenen Punkte P als Spitze und der gegebenen zusammen mit einer anstossenden Seite als Seiten und verfährt, wie bei den vorigen Aufgaben.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 294. In einem Dreieck einen Punkt zu suchen, dessen Verbindungslinie mit den Seitenmitten das Dreieck in drei gleiche Teile teilt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 280 und 281.

Aufgabe 295. Man zeichne ein Drittel eines Dreiecks als Dreieck mit gleicher Grundseite.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 280 und 281.

Aufgabe 296. Ein Dreieck in 4, 5, 6 gleiche Teile zu teilen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 282.

Aufgabe 297. Ein Dreieck parallel einer Seite in drei gleiche Teile teilen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 283.

Aufgabe 298. Ein Dreieck in drei gleiche Teile teilen vom gegebenen Punkte P des Umfangs.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 284.

Aufgabe 299. Ein Dreieck in 3, 5, 6 Teile teilen durch einen Linienzug von C aus.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 285.

Aufgabe 300. Von einem Dreieck $\frac{1}{3}$,
 $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ u. s. w. als Dreieck ab-
 schneiden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Auf-
 gabe ist analog der Auflösung der Auf-
 gabe 286.

Aufgabe 301. Ein Dreieck zu halbieren
 im Anschluss an eine gegebene Linie AD .

Andeutung. Die Auflösung dieser Auf-
 gabe ist analog der Auflösung der Auf-
 gabe 287.

Aufgabe 302. Ein Dreieck zu halbieren
 im Anschluss an eine gegebene Linie PD .

Andeutung. Die Auflösung dieser Auf-
 gabe ist analog der Auflösung der Auf-
 gabe 288.

Aufgabe 303. Einen Rhombus von einer
 Ecke aus in 3, 4, 5 Teile zu teilen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Auf-
 gabe ist analog der Auflösung der Auf-
 gabe 289.

Aufgabe 304. Ein Parallelogramm durch
 einen Linienzug von einem gegebenen Punkte
 aus in 4, 6, 7 Teile zu teilen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Auf-
 gabe ist analog der Auflösung der Auf-
 gabe 290.

Aufgabe 305. Von einem gegebenen
 Vieleck eine gegebene Fläche abzuschneiden
 durch eine Teilungslinie von einer Ecke A aus.

Andeutung. Die Auflösung dieser Auf-
 gabe ist analog der Auflösung der Auf-
 gabe 291.

Aufgabe 306. Von einem gegebenen
 Vieleck eine gegebene Fläche abzuschneiden
 durch eine Teilungslinie von einem Punkte P
 des Umfangs.

Andeutung. Die Auflösung dieser Auf-
 gabe ist analog der Auflösung der Auf-
 gabe 292.

Aufgabe 307. Von einem gegebenen
 Vieleck eine gegebene Fläche abzuschneiden
 durch eine Teilungslinie im Anschluss an
 eine Teilungslinie AD .

Andeutung. Die Auflösung dieser Auf-
 gabe ist analog der Auflösung der Auf-
 gabe 293.

Aufgabe 308. Von einem gegebenen
 Vieleck eine gegebene Fläche abzuschneiden
 durch eine Teilungslinie im Anschluss an
 eine Teilungslinie DP .

Andeutung. Die Auflösung dieser Auf-
 gabe ist analog der Auflösung der Auf-
 gabe 293.

Aufgabe 309. Ein Trapez oder Parallelo-
 gramm (Rechteck, Quadrat) von einem Punkte
 der parallelen Seiten aus in n gleiche Teile
 zu teilen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Auf-
 gabe ist analog der Auflösung der Auf-
 gabe 290.

Aufgabe 310. Desgleichen von einem beliebigen Punkte der Zeichnungsebene aus.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 290.

Aufgabe 311. Man beweise, dass jede beliebige Linie durch den Mittelpunkt eines Parallelogramms dasselbe in zwei gleich-grosse Flächen teilt.

Andeutung. Man untersuche die zen-trische Symmetrie.

Aufgabe 312. Welche Beschränkung er-fährt vorige Angabe für eine Linie durch die Mitte der Mittellinie des Trapezes?

Andeutung. Die Auflösung dieser Auf-gabe ist analog der Auflösung der Auf-gabe 290.

9) Aufgaben über das graphische Rechnen.

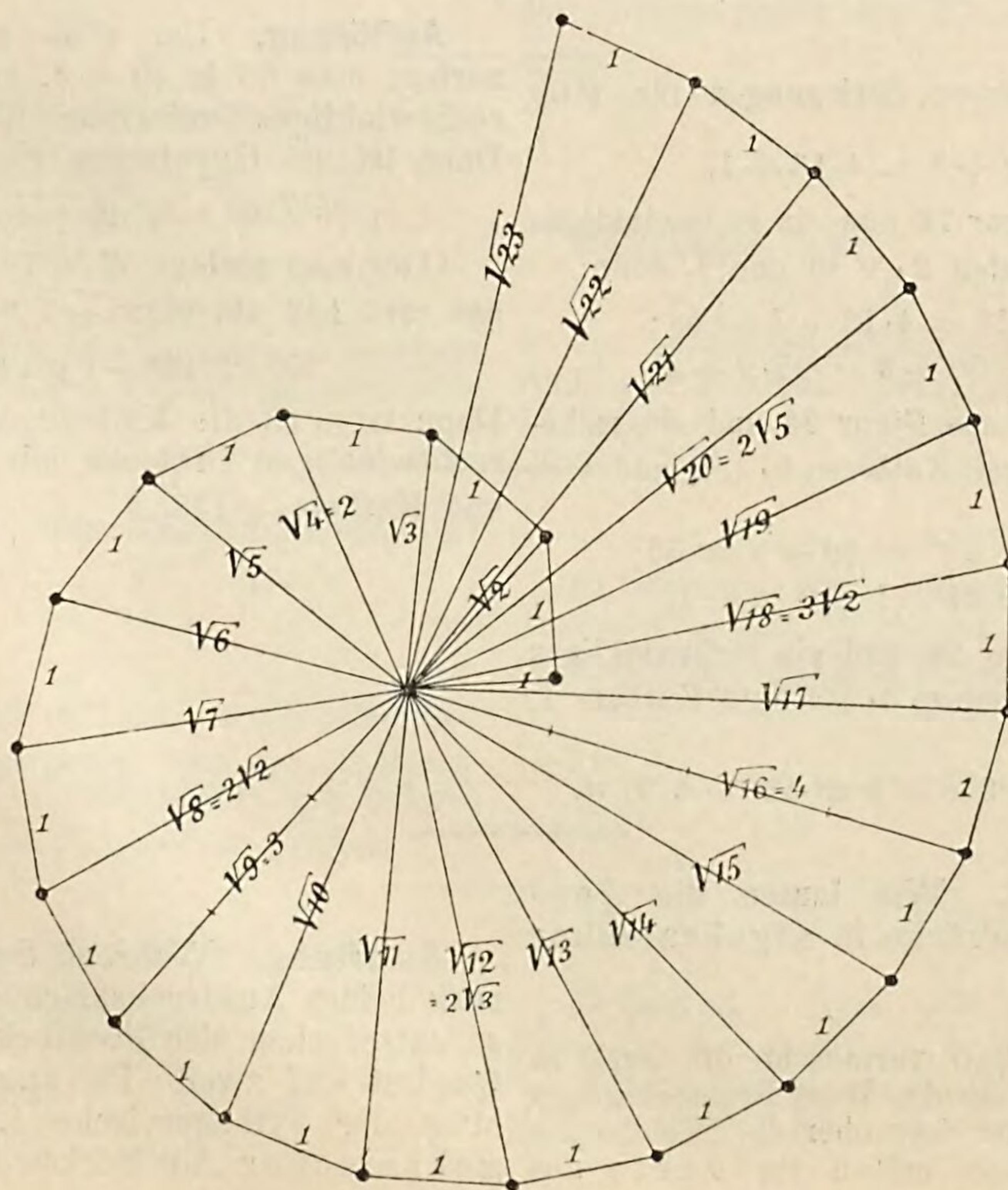
(Zu Abschnitt 9.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 313. Man konstruiere die Qua-dratwurzeln aus den Zahlen der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3 ...

Auflösung. Da Wurzel aus 1 selbst 1 ist, so kann man die Wurzel aus 2 erhalten als Hypotenuse eines gleichschenkligen recht-

Figur 94.



Erkl. 329. Zeichnet man die Quadratwurzeln der natürlichen Zahlenreihe in der nebenstehenden Weise nach Figur 94, so bilden die Endpunkte der erhaltenen Hypotenuse die Punkte einer Kurve, welche in spiralförmiger Gestalt ausgeht vom Punkte 1 und sich in Windungen um den Mittelpunkt (0-Punkt) stets weiter von demselben entfernt, aber erst nach unendlich vielen Windungen ins Unendliche gelangt.

Dieselbe wird die Archimedische Spirale genannt nach dem Mathematiker Archimedes von Syrakus († 212 v. Chr.).

Erkl. 330. Um aus einer bestimmten Zahl x die Quadratwurzel zu konstruieren, braucht man nicht die ganze Spirale von Anfang an zu zeichnen, sondern nur von der letzten vorhergehenden Quadratzahl aus. Aber auch so lassen sich vielfache Vereinfachungen anbringen durch passende Zerlegungen der zu radizierenden Zahl. Man vergleiche die folgenden Aufgaben.

Aufgabe 314. Man konstruiere Quadratwurzel aus 53.

Erkl. 331. Andere Zerlegungen für $\sqrt{53}$ wären:

$$53 = 52 + 1 = 4 \cdot 13 + 1,$$

also $\sqrt{13}$ aus Figur 74 und ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten $2 \cdot \sqrt{13}$ und 1, denn:

$$(2\sqrt{13})^2 + 1^2 = 4 \cdot 13 + 1 = 53;$$

Ferner: $53 = 50 + 3 = 25 \cdot 2 + 3,$

also $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ aus Figur 94 und ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten $5 \cdot \sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$, denn:

$$(5\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 = 50 + 3 = 53;$$

Endlich: $53 = 54 - 1 = 9 \cdot 6 - 1,$

also $\sqrt{6}$ aus Figur 94 und ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse $3 \cdot \sqrt{6}$ und Kathete 1, denn:

$$(3\sqrt{6})^2 - 1^2 = 9 \cdot 6 - 1 = 53 \dots \text{u. s. w.}$$

Aufgabe 315. Wie lauten die geometrischen Ausdrücke in algebraischer Ausdrucksweise?

Erkl. 332. Man vertauscht oft auch in geometrischen Sätzen das Wort Rechteck gegen Produkt. So ist der Satz über die „Fläche des Dreiecks gleich dem halben Produkte aus

winkligen Dreiecks mit Katheten $= \sqrt{1} = 1$. Denn nach dem pythagoreischen Lehrsatz ist:

$$1 + 1 = (\sqrt{2})^2 = 2.$$

Ferner entsteht $\sqrt{3}$ als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete $\sqrt{2}$ ist, dessen andere Kathete die Einheit ist. Denn man hat wieder:

$$(\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = (\sqrt{3})^2 = 3.$$

So kann man aus jeder Zahl n die Quadratwurzel erhalten, wenn man die Wurzel aus der um 1 kleinern Zahl kennt und dieselbe als eine Kathete und die Einheit als zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks benutzt. Dann ist:

$$(\sqrt{n-1})^2 + 1^2 = n - 1 + 1 = n = (\sqrt{n})^2.$$

Also ist die Hypotenuse dieses Dreiecks gleich $\sqrt{n}$.

In dieser Reihe sind natürlich auch die Quadratwurzeln der Quadratzahlen selbst enthalten, welche nicht irrationale sondern rationale Zahlen liefern, deren Längen also mit der Einheit nicht inkommensurabel, sondern kommensurabel sind. So:

$$\sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3 \text{ u. s. w.}$$

Auflösung. Um $\sqrt{53}$ zu konstruieren zerlegt man 53 in $49 + 4$, zeichnet also ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten 7 und 2. Dann ist die Hypotenuse gleich:

$$\sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}.$$

Oder man zerlegt 53 in $196 - 143$, zeichnet erst 143 als $\sqrt{12^2 - 1}$ und dann:

$$53^2 = 14^2 - (\sqrt{143})^2.$$

Dann ist $\sqrt{53}$ die Kathete des entstehenden rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenuse 14 und Kathete $\sqrt{143}$.

Auflösung. Während Summe und Differenz beiden Ausdrucksarten gemeinsam sind, so entsprechen sich Rechteck und Produkt, Quadrat und zweite Potenz. Daher heisst etwa der pythagoreische Lehrsatz in algebraischer Ausdrucksweise:

Grundseite und Höhe“ eigentlich algebraisch ausgedrückt. Dieser Satz wird eben auch meist in der Rücksicht gebraucht, den rechnermässigen Wert der Dreiecksfläche auszudrücken.

Erkl. 333. Eine gleichfalls algebraische Ausdrucksweise sind die Proportionen. Daraus entnimmt man auch die Worte „proportional“ und „mittlere Proportionale“, z. B. die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks (Halbsehne) ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse (des senkrechten Durchmessers).

Die zweite Potenz einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der zweiten Potenzen der andern Seiten vermehrt oder vermindert um das doppelte Produkt aus der einen Seite und deren Projektion auf die andere.

Und ebenso der Satz von der Höhe bzw. Halbsehne:

Die zweite Potenz der Höhe im rechtwinkligen Dreieck (einer Halbsehne) ist gleich dem Produkt der Abschnitte der Hypotenuse (des senkrechten Durchmessers).

Aufgabe 316. Man konstruiere den Ausdruck $\frac{a \cdot h}{b}$, wo a, b, h gegebene Strecken sind.

Erkl. 334. Nach Antwort 14 ist der Inhalt des Dreiecks $= \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$, also $a h_a = b h_b$,
 $h_b = \frac{a \cdot h_a}{b}$.

Auflösung. Man zeichne ein Dreieck mit Seite a , $h = h_a$, und b als Seite b , dann ist die Höhe h_b dieses Dreiecks gleich $\frac{a \cdot h_a}{b}$.

Aufgabe 317. Man konstruiere das Glied x in der Proportion $b : a = h : x$, wo a, b, h gegebene Strecke sind.

Auflösung. Da $x = \frac{a \cdot h}{b}$ wird, so ist die Lösung genau wie die vorige.

Aufgabe 318. Man konstruiere:

$$\sqrt{(a+b)(a-b)}$$

aus den Strecken a und b .

Erkl. 335. Man kann auch $a+b$ und $a-b$ als Durchmesserabschnitte an einander antragen und die Wurzel aus dem Produkt als senkrechte Halbsehne erhalten.

Auflösung. Da:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

so ist $\sqrt{a^2 - b^2}$ Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse a und Kathete b .

Aufgabe 319. Man konstruiere den Ausdruck $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = x$.

Erkl. 336. Unmittelbare Lösung liefert erst $\sqrt{a^2 + b^2}$ als Hypotenuse, dann $a \cdot b$ als Rechteck, und dies zu verwandeln in ein anderes mit Seite $\sqrt{a^2 + b^2}$ und zweiter Seite x .

Auflösung. Nach Antwort 43, 1) ist der Ausdruck x der Wert der Höhe in einem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a und b .

Aufgabe 320. Es soll die Fläche:

$$\frac{h}{2p} (h^2 + p^2)$$

konstruiert werden.

Auflösung. Nach Antwort der Frage 43, 5) ist der gegebene Ausdruck der Wert der Fläche des rechtwinkligen Dreiecks mit Höhe h und Hypotenusenabschnitt p .

Aufgabe 321. Den Ausdruck:

$$a = \sqrt{a^2 + c^2 - 2c\sqrt{b^2 - h^2}}$$

zu konstruieren.

Erkl. 337. Die unmittelbare Lösung würde weit umständlicher sein, und hätte auch den pythagoreischen Lehrsatz zu benützen.

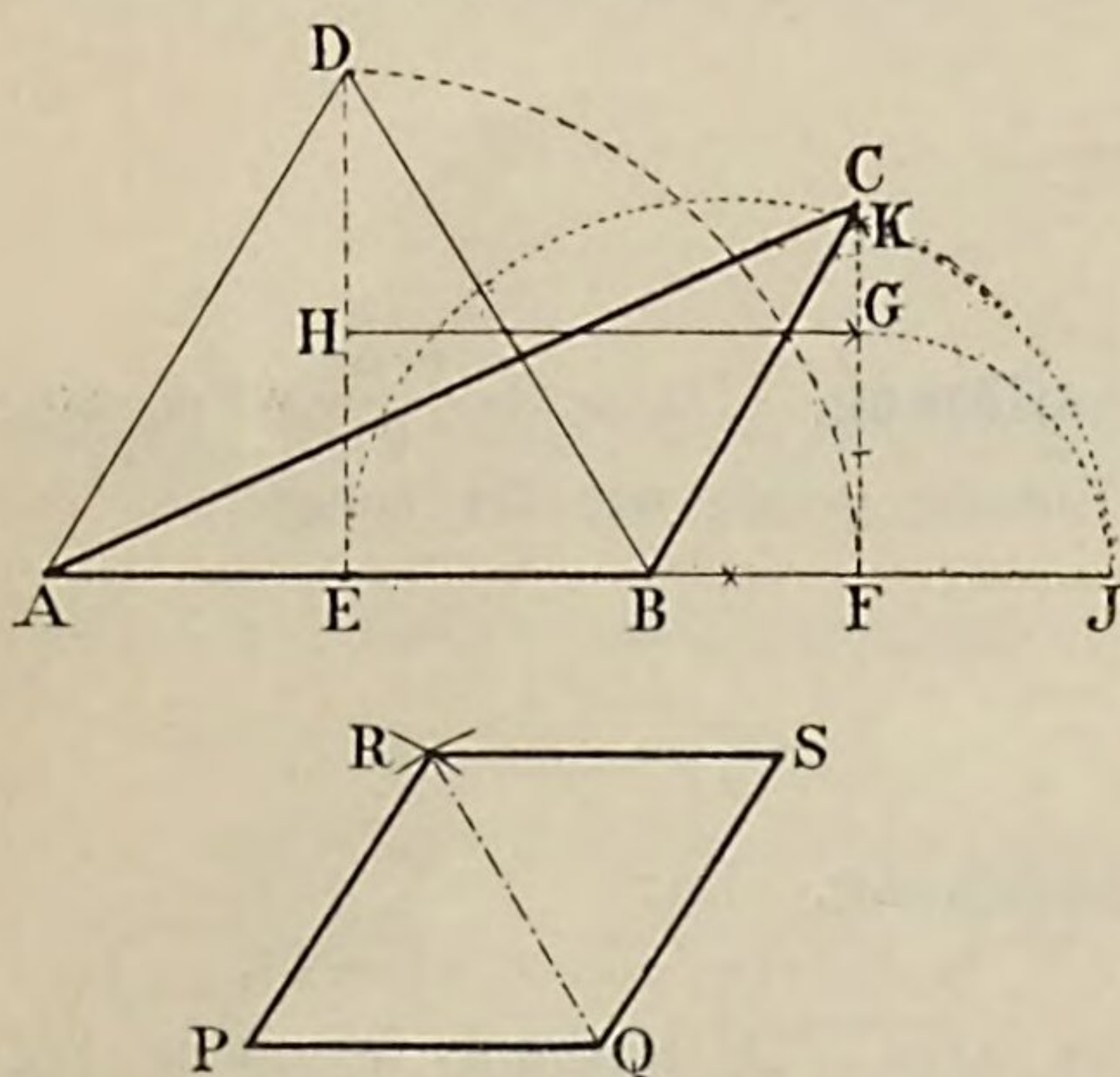
Aufgabe 322. Man konstruiere die Strecke:

$$m = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{c^2}{4}}$$

Erkl. 338. Aehnliche Aufgaben erhält man aus Abschnitt 5 in grosser Menge.

Aufgabe 323. Eine gegebene Dreiecksfläche F soll dargestellt werden als ein Rhombus, dessen eine Diagonale gleich der Seite ist.

Figur 95.



Erkl. 339. In Figur 95 ist ABC das gegebene Dreieck, ABD das gleichseitige Dreieck mit Seite $AB = g$, also DE die Höhe $h_1 = \frac{g\sqrt{3}}{2}$. Dann ist abgetragen $EF = ED$ (das ursprüngliche Dreieck ABC wurde zur Vereinfachung der Figur so gewählt, dass F mit dem Höhenfusspunkte zusammenfällt) und $FG = \frac{2}{3}FC = \frac{2}{3}h$ gemacht. Also ist Rechteck $EF GH = \frac{2hh_1}{3} = \frac{gh}{\sqrt{3}} = \frac{2F}{\sqrt{3}}$. Wird endlich $FG = FJ$ gemacht und über der Strecke $EF + FJ = EJ$ ein Halbkreis gezeichnet, so liefert dessen Schnittpunkt K mit FG die Quadratseite $FK = a$.

Mit dieser Seite wird dann das Rhombus $PQRS$ konstruiert, worin $PQ = PR = QR = a$, also ist:

$$\text{Dreieck } ABC = \text{Rhombus } PQRS.$$

Auflösung. Der Ausdruck ist der Wert der Seite a eines schiefwinkligen Dreiecks mit den Seiten b, c und h als Höhe h_c .

Auflösung. Der Ausdruck ist die Mittellinie m_c im Dreieck mit Seiten a, b, c .

Auflösung. Die Fläche des Rhombus ist das halbe Produkt der Diagonalen. Wenn nun eine Diagonale gleich den Seiten ist, so ist die Hälfte des Rhombus ein gleichseitiges Dreieck, also die Höhe $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ dieses Dreiecks die halbe Diagonale des Rhombus, die ganze demnach $a\sqrt{3}$, der Inhalt $\frac{a^2}{2}\sqrt{3}$. Soll dies gleich F sein, so wird:

$$a^2 = \frac{2F}{\sqrt{3}}, \quad a = \sqrt{\frac{2F}{\sqrt{3}}}.$$

Ist also bei dem gegebenen Dreieck die Grundseite g und Höhe h , so wird:

$$F = \frac{gh}{2}, \quad a = \sqrt{\frac{gh}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{gh\sqrt{3}}{3}}.$$

Um diesen Ausdruck zu konstruieren, zeichnet man zunächst den Ausdruck $h_1 = \frac{g\sqrt{3}}{2}$ als Höhe des gleichseitigen Dreiecks mit gleicher Grundseite g . Dann hat man noch $a = \sqrt{\frac{2h \cdot h_1}{3}}$. Zeichnet man also das Rechteck mit einer Seite h_1 , anderer Seite $\frac{2}{3}h$, so wird dessen Inhalt $\frac{2h \cdot h_1}{3}$, und wenn dieses Rechteck in ein Quadrat verwandelt wird, so ist die Seite eines Quadrats die gesuchte Rhombuseite.

Aufgabe 324. Man soll eine gegebene Strecke a so teilen, dass die Differenz der Quadrate beider Teile gleich wird dem Rechteck der ganzen Strecke a und einer gegebenen Strecke b .

Erkl. 340. Der Teilungspunkt der Strecke a wird ein innerer Teilpunkt, wenn $\frac{a+b}{2} < a$, also wenn $b < a$ ist. Dann ist $x = \frac{a+b}{2}$, der Rest $a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$. Und man hat:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{4ab}{4} = a \cdot b.$$

Wird $b = a$, so wird $x = a$, der Rest 0.

Wird $b > a$, so wird $x > a$, der Teilpunkt wird ein äusserer. Die zweite Strecke wird $\frac{b-a}{2}$, und man hat wieder:

$$\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{4ab}{4} = a \cdot b.$$

Auflösung. Bezeichnet man die Seite des grösseren der beiden Quadrate mit x , so muss die kleinere $a - x$ sein, also:

$$x^2 - (a - x)^2 = a \cdot b.$$

Demnach:

$$x^2 - a^2 + 2ax - x^2 = ab$$

und

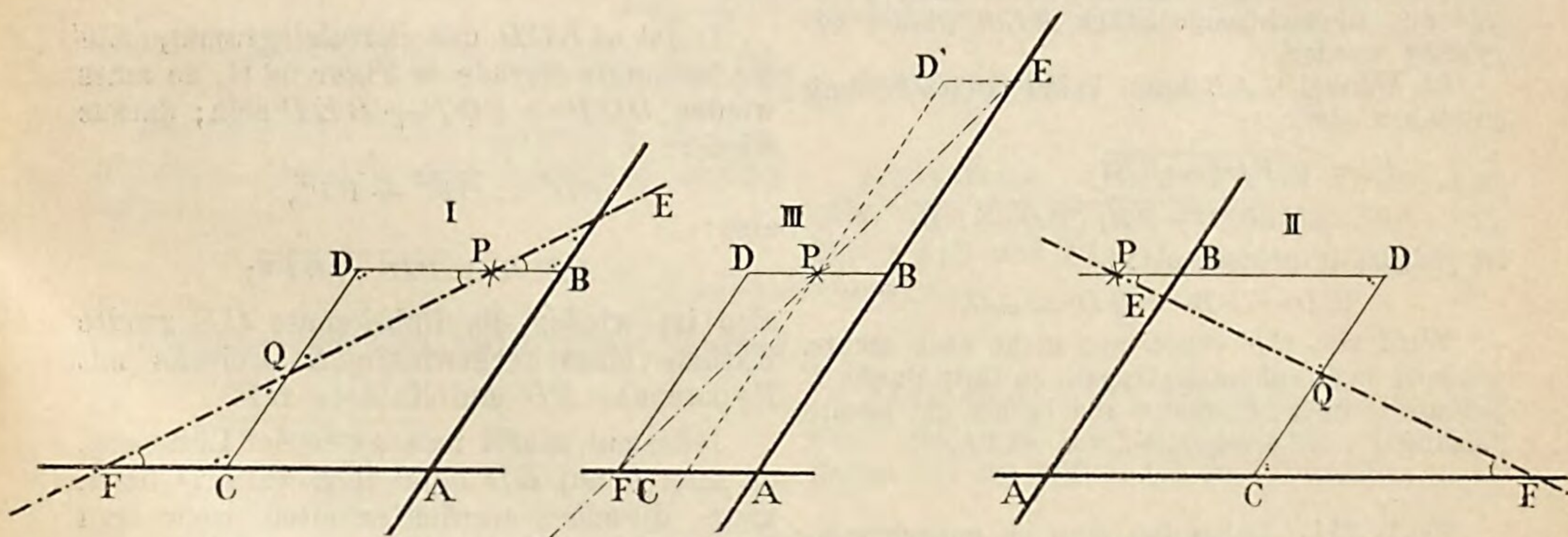
$$2ax = ab + a^2$$

oder:

$$x = \frac{ab + a^2}{2a} = \frac{b + a}{2}.$$

Nimmt man also für x die halbe Summe der Strecken b und a , für die andere Seite den Rest, so ist die Aufgabe befriedigt.

Figur 96.



Aufgabe 325. Es sind zwei gerade Linien und ein Punkt P gegeben. Man soll durch P eine Linie ziehen, welche mit den Schenkeln des geschnittenen Winkels ein Dreieck von vorgeschriebener Grösse F bildet.

Erkl. 341. Wenn $DQP = CQF + BEP$ und zugleich:

$$DQP : CQF : BEP = \overline{DP}^2 : \overline{CF}^2 : \overline{BP}^2,$$

so wird einzeln:

$$CQF : DQP = \overline{CF}^2 : \overline{DP}^2$$

und

$$BEP : DQP = \overline{BP}^2 : \overline{DP}^2,$$

also durch Addition der Brüche mit gleichem Nenner:

$$(CQF + BEP) : DQP = (\overline{CF}^2 + \overline{BP}^2) : \overline{DP}^2.$$

Auflösung. Es kommt in Betracht 1) der den Punkt P selbst enthaltende Winkelraum, und in diesem Raum kann nur eine Fläche oberhalb gewisser Grösse erhalten werden; 2) in denjenigen Winkelräumen, für welche P im Nebenwinkel liegt, kann eine beliebig grosse oder kleine Dreiecksgrösse bis zur unteren Grenze Null erhalten werden; 3) derjenige Winkelraum, für welchen P im Scheitelwinkel liegt, bleibt ganz ausser Betracht. Für jeden der in Angriff genommenen Fälle kann jedenfalls die gegebene Fläche F dargestellt werden als Parallelogramm mit dem

Da die linke Seite dieser Gleichung 1 ist, so muss dies auch von der rechten gelten, also:

$$\overline{CF}^2 + \overline{BP}^2 = \overline{DP}^2.$$

Erkl. 342. Würde P in Figur 96 I näher an D als an B rücken, so würde die Aufgabe unmöglich, weil der Wert für CF imaginär wird, wenn unter dem Wurzelzeichen der Subtrahend grösser wird als der Minuend.

Der kleinste mögliche Wert von CF ist aber Null, und wird erreicht, wenn $PB = PD$ ist, also P Mittelpunkt von BD . Dies ist also das kleinste aller durch P zu erhaltenden Dreiecke überhaupt.

Dagegen kann Punkt F innerhalb AC fallen, dann kommt Punkt Q unterhalb AC , aber die Gleichung bleibt bestehen. Dieser letztere Fall ist derjenige, wenn CF negativ genommen wird.

Würde endlich PB gleich Null, so würde die Aufgabe noch einfacher, $CF = PD = BD$.

Ueber A hinaus kann Punkt F nicht kommen, weil $CA = BD$, und in der Wurzel sogar ein kleineres Stück als CA als Minuend steht.

Erkl. 343. In Figur 96 II wird durch die Linie EF von dem Parallelogramm $ABCD$ das Dreieck PQD abgeschnitten; dafür muss QCF und das überschüssige Stück PEB wieder zugesetzt werden.

Im Winkel CAB kann keine zweite Lösung entstehen, denn:

$$\begin{aligned} CF &= \sqrt{PD^2 - PB^2} \\ &= \sqrt{(PD + PB)(PD - PB)} \end{aligned}$$

ist jedenfalls grösser als:

$$PD - PB = BD = AC.$$

Wird also CF von C aus nicht nach rechts, sondern nach links angetragen, so fällt Punkt F jedenfalls über A hinaus und liefert die zweite Lösung im Scheitelwinkel von CAE .

Erkl. 344. Daher hat man im ganzen mindestens zwei Lösungen, wenn die Fläche F sehr klein, drei Lösungen, wenn CF in Figur 96 I zu Null wird, und in jedem andern Falle alle vier Lösungen.

Aufgabe 326. Ein rechtwinkliges Dreieck mit gegebener Kathete a zu konstruieren, von welchem das Rechteck der Kathete b und der Hypotenuse c den gegebenen Wert F habe.

Erkl. 345. Die Gleichung vierten Grades konnte auch reduziert werden durch Division mit F und hätte so ergeben:

$$\frac{b^4}{F} + \frac{a^2 b^2}{F} - F = 0.$$

gegebenen Winkel der Linien a und b , dessen Höhe gleich dem Abstand des Punktes P von der einen Geraden a ist. Wenn dann durch die verlangte Gerade dieses Parallelogramm durchschnitten wird, so muss das vom Parallelogramm abgeschnittene gleich den anzusetzenden Teilen sein. Diese Gleichheit liefert die rechnermässige Bedingung für die Konstruktion:

1) Ist $ABCD$ das Parallelogramm, EF die verlangte Gerade in Figur 96 I, so muss $DQP = CQF + BPE$ sein. Das sind wegen der Parallelen drei Dreiecke mit gleichen Winkeln, deren Flächen sich also verhalten wie die Quadrate der Seiten. Daraus erhält man die Gleichung (siehe Erkl. 341):

$$\overline{PD}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{BP}^2$$

oder:

$$CF = \sqrt{DP^2 - PB^2},$$

worin sowohl BP als PD gegebene Grössen sind; also erhält man die Unbekannte CF als zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenuse DP und zweiter Kathete PB .

2) Ist $ABCD$ das Parallelogramm, EF die verlangte Gerade in Figur 96 II, so muss wieder $DQP = CQF + BPE$ sein; daraus wieder:

$$\overline{PD}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{BP}^2,$$

also:

$$CF = \sqrt{PD^2 - BP^2};$$

also ist wieder die Unbekannte CF zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenuse PD und Kathete BP .

Jedesmal erhält man zweierlei Lösungen, da man P auf BD oder auch auf CD legen kann; dieselben werden erhalten, wenn man der für CF erhaltenen Wurzel positives oder negatives Vorzeichen gibt, d. h. die Strecke CF nach der einen oder andern Seite von C aus anträgt.

Auflösung. Kennt man a und $b \cdot c = F$, so liefert der pythagoreische Lehrsatz:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

die Gleichung:

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{F}{b}\right)^2$$

oder:

$$b^4 + a^2 b^2 - F^2 = 0.$$

Diese Gleichung vom vierten Grade kann geometrisch gelöst werden, weil die

Darin wäre als Unbekannte aufgetreten:

$$\frac{b^2}{\sqrt{F}},$$

also wieder eine Streckengrösse, und es wäre geworden:

$$\left(\frac{b^2}{\sqrt{F}}\right)^2 + \frac{a^2}{\sqrt{F}} \cdot \left(\frac{b^2}{\sqrt{F}}\right) - F = 0,$$

$$\frac{b^2}{\sqrt{F}} = -\frac{a^2}{\sqrt{F}} + \sqrt{\frac{a^2}{\sqrt{F}} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{F}} + F};$$

also wieder ein Ausdruck, in welchem nur Aggregate zweiter und erster Dimension auftreten.

Erkl. 346. Andere Gleichungen vierten Grades als die von nebenstehender Art lassen sich nicht auf die zweite Dimension reduzieren, und ebensowenig solche dritten Grades, können also durch geometrische Konstruktion nicht gelöst werden.

Unbekannte b nur in der zweiten Potenz vorkommt. Dividiert man nämlich die Gleichung durch die bekannte Grösse von zweiter Dimension a^2 oder durch F , so entsteht:

$$\frac{b^4}{a^2} + b^2 - \frac{F^2}{a^2} = 0$$

oder:

$$\left(\frac{b^2}{a}\right)^2 + \frac{b^2}{a} \cdot a - \left(\frac{F}{a}\right)^2 = 0,$$

worin nun bloss noch Grössen zweiter Dimension auftreten, die geometrisch konstruierbar sind. Man erhält jetzt:

$$\frac{b^2}{a} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{F}{a}\right)^2}.$$

Durch Konstruktion dieses Ausdrucks nach irgend einer Weise erhält man als Streckengrösse den Wert $\frac{b^2}{a}$, also durch Multiplikation mit a die Fläche b^2 , welche als Quadrat darzustellen ist, um Strecke b zu erhalten.

Dann ist c ebenfalls leicht zu erhalten, und das Dreieck bekannt.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 327. Man konstruiere die Quadratwurzel aus 39 und beliebigen andern Zahlen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 313 und 314.

Aufgabe 328. Man konstruiere folgende Ausdrücke:

$$\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab},$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ap},$$

$$\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}.$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 316 bis 322 und Antwort der Frage 88.

Aufgabe 329. Eine gegebene Fläche F als rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck darzustellen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 323.

Aufgabe 330. Eine gegebene Strecke a so zu teilen, dass die Summe der Quadrate der Teilstrecken eine gegebene Fläche F liefert.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 324 und Antwort der Frage 90.

Aufgabe 331. Die kleinste Fläche zu konstruieren, welche durch einen Winkel α und eine gerade Linie durch einen Punkt P in α begrenzt werden kann.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 325.

Aufgabe 332. Die Lösungen der Gleichung:

$$x^4 + abx^2 + cdef = 0$$

zu konstruieren, oder:

$$x^4 + Fx^2 + F^2 = 0$$

u. dergl.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 326.

Ergebnisse der ungelösten Aufgaben.

13. $0,170435 \text{ a} = 17,0435 \text{ qm} = 1704,35 \text{ qdm}$
 $= 170435 \text{ qcm}.$
14. 42 Hektar 43 Ar 92 qm 10 qdm.
15. 33 ha 39 a 12,9 qm.
16. 114,3 qm.
17. Rund $52\frac{1}{2} \text{ ‰}$, 46 ‰ , $11\frac{1}{2} \text{ ‰}$.
18. 52,8 qm. 19. 1,23 $\mathcal{M}$.
20. Weil $1 \text{ a} = 100 \text{ qm}$, $1 \text{ ha} = 100 \text{ a}$.
21. 27 $\mathcal{M}$ 50 $\mathcal{J}$. 22. 20 Beete.
23. Rund 380 Quadratmeilen.
24. 1561 qm. 25. $36\frac{4}{5}$ Morgen.
26. 36000 Quadratfuss. 27. 3150 qm.
28. 180000 Quadratmeilen.
29. 22000000 qkm.
-
47. a) 3729 ha, b) 3,86 qm, c) 2,364 qdm.
48. a) 89996 qmm, b) 98,15 qdm,
c) 515,4 qdm.
49. 122 Zentner. 50. 954 Stück.
51. $16\frac{2}{3} \text{ dm}$. 52. 3 m und 6 m.
53. a) 82369 qkm, b) 28,3 Ar, c) 32,83 qdm.
54. a) 2,8 km, b) 920 m, c) 34,8 m,
d) 57,2 cm, e) 120,4 mm.
55. 1,21 $\mathcal{M}$. 56. 4,52 m.
57. Aus $a \cdot b_1 = a \cdot b_2$ folgt $b_1 = b_2$.
58. Die Hälften sind kongruent.
59. Subtrahiere die ungleichen Seiten.
60. a) 58 qdm, b) 42,68 qdm, c) 10,2 qdm.
61. $5\frac{3}{4} \text{ dm}$.
-
87. a) 11049,16785 qm, b) 357,4889 qm.
88. 248,44 m. 89. 981,695 m.
90. 8,889. 91. 0,5.
92. $\angle \gamma$ gibt den Peripheriewinkelkreis, F die Höhenparallele, Schnittpunkt C .
93. $g = m = \frac{a+c}{2}.$ 94. Figur 66.
95. $a = 3, c = 1.$
96. $a = 9, c = 3, h = 15.$
97. $a = \frac{2F}{h} - c.$ 98. 12.
99. 6 und 8.
100. $F = 16, a = 4\sqrt{2}.$
101. $F = 32, c = 8:\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$
102. 187.
103. $2s = 19,2, s = 9,6, q_0 = \frac{16,56}{9,6} = 1,725,$
 $q_a = \frac{16,56}{4,6} = 3,6, q_b = \frac{16,56}{2,7} = 6,133 \dots,$
 $q_c = \frac{16,56}{2,3} = 7,2.$
104. $q_a = 2,5, q_a = 10.$
105. $s = 8.$ 106. 12 qcm.
111. Wie die Mittellinien.
-
126. Man halbiere den Winkel.
127. Nein, ausser wenn P Mittelpunkt.
128. $\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, 2 \cdot \frac{2}{9}.$
129. Wenn $ABCD$ Rhombus.
130. Wenn P Mittelpunkt.
131. $\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + 2 \cdot \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$
 $= a^2 = 4 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{(2a)^2}{4}.$
132. $(a+b-c) = a^2 + b^2 + 2ab - 2ac - 2bc + c^2,$
 $(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$
133. Man verlängert in Figur 21 die zwischenliegende Dreiecksseite zum Schnitt mit dem Schlussparallelogramm.
134. Man schiebt gleichviel vorwärts und rückwärts.

135. Verkleinerung des $\angle (a, g)$ vergrößert die Projektion und umgekehrt.
 136. Sowie ungleiche Seiten vorhanden wären, hätte das gleichschenklige nach 122 grösseren Inhalt,
 137 und 139. Die Höhe wird stets kleiner, als wenn $a \perp b$.
 138. Wie 136.
 140. Nach 138 muss das Viereck gleichseitig sein.

$$h_c = 10,5, \quad F = 155,4, \quad \varrho_0 = 4 \frac{2}{3},$$

$$\varrho_a = 7,925, \quad \varrho_b = 15,540, \quad \varrho_c = 42,000,$$

$$r = 15,2, \quad h_a' = 27,142, \quad h_a'' = -4,456,$$

$$n_a = 13,571, \quad h_b' = 19,527, \quad h_b'' = -6,188,$$

$$n_b = 9,764, \quad h_c' = -6,933, \quad h_c'' = 17,433,$$

$$n_c = -3,467, \quad m_a = 25,74, \quad m_b = 18,9,$$

$$m_c = 12,094, \quad w_a = 25,313, \quad u_a = 6,034,$$

$$v_a = 7,666, \quad w_b = 16,974, \quad u_b = 15,928,$$

$$v_b = 7,372, \quad w_c = 10,72, \quad u_c = 10,960,$$

$$v_c = 18,640.$$

155. 1,6, 6,3, 6,5 u. s. w. 156. 73.
 157. 80. 158. 58. 159. 52.
 160. $\angle \gamma$ erst stumpf, dann recht, dann spitz.
 161. $\gamma > 90 > \beta > \alpha, \quad \alpha > \beta > \gamma > 90,$
 $\alpha < \beta < 90 = \gamma.$ 162. 36.
 163. $AB = 12 \cdot \sqrt{3}, \quad AC = 12.$
 164. s Maximum, wenn a Minimum.
 166. $r = \sqrt{a + \left(\frac{s}{2}\right)^2} : \sqrt{103}, \quad \frac{200}{\sqrt{103}}.$
 167. $\sqrt{21}, \quad \frac{1}{\sqrt{21}}.$
 168. s kann wachsen bis d , a nur bis z .

232. $F = 6 \cdot \sqrt{145}.$ 233. 9.
 234 und 235. Wie in 202 bis 215.
 236. Die Längen in Aufgabe 222 mit $5 \frac{5}{6}$ zu vervielfachen, $F = 204 \frac{1}{6}.$
 237. Die Längen in Aufgabe 223 mit 0,7 zu vervielfachen, $F = 82,32.$
 238. Die Längen in Aufgabe 224 mit 5 zu vervielfachen, F mit 25.
 239. Die Längen in Aufgabe 224 mit $\frac{14}{\sqrt{3}}$ zu vervielfachen, F mit $\frac{196}{3}.$

- 193 bis 201. $a = 5, \quad b = 3,75, \quad c = 6,25,$
 $h = 3, \quad p = 4, \quad q = 2,25, \quad F = 9,375.$
 202 bis 215. $a = 13,7, \quad p_a = -5,314,$
 $q_a = 19,014, \quad b = 23,3, \quad p_b = 26,424,$
 $q_b = -3,124, \quad c = 29,6, \quad p_c = 8,8,$
 $q_c = 20,8, \quad h_a = 22,686, \quad h_b = 13,339,$
 $h_c = 10,5, \quad F = 155,4, \quad \varrho_0 = 4 \frac{2}{3},$
 $\varrho_a = 7,925, \quad \varrho_b = 15,540, \quad \varrho_c = 42,000,$
 $r = 15,2, \quad h_a' = 27,142, \quad h_a'' = -4,456,$
 $n_a = 13,571, \quad h_b' = 19,527, \quad h_b'' = -6,188,$
 $n_b = 9,764, \quad h_c' = -6,933, \quad h_c'' = 17,433,$
 $n_c = -3,467, \quad m_a = 25,74, \quad m_b = 18,9,$
 $m_c = 12,094, \quad w_a = 25,313, \quad u_a = 6,034,$
 $v_a = 7,666, \quad w_b = 16,974, \quad u_b = 15,928,$
 $v_b = 7,372, \quad w_c = 10,72, \quad u_c = 10,960,$
 $v_c = 18,640.$
 246. $F = 2 \cdot \sqrt{(a+b+f)(-a+b+f)(a-b+f)(a+b-f)} = 132, \quad e = \frac{2F}{f} = 12.$
 247. $c = 21, \quad h = 16,5, \quad p = 14,4, \quad e = 36,36.$

262. Kreisbogen über der doppelten Grundseite als Sehne, mit 2γ als Peripheriewinkel trifft die Parallele im Abstand $\frac{1}{2}h$ im gesuchten Punkte C .
 263 und 264. Das gegebene zweite erhält durch vorhergehende Verwandlung eine gleiche Seite und einen für Addition supplementären, für Subtraktion gleichgrossen Winkel.
 265. Erst Verkürzung der Seite bis zur neuen Höhenparallele, dann Verschiebung der Spitze, bis a Tangente an Kreis um A mit Radius h_a .
 266. Beiderseits des Höhenfusspunktes (Berührungspunkt) $\frac{c}{2}$ anzutragen.
 267. Rückwärts wie 255.
 268. Erst ein anliegender Winkel zu ändern, dann wie 255 neue Grundseite parallel verschieben.
 269. Senkrechte zur Mittellinie der der Diagonale anliegenden Seiten.
 270. Aus dem Fünfeck Viereck, daraus Dreieck.
 271. Sechseck, Fünfeck, Viereck.
 272. Die halbe Dreieckshöhe als Mittelsenkrechte der Seite.
 273. Erst Seite allgemein durch den Punkt P , dann von Länge bis P .
 274. Dreieck der Diagonalen in das neue mit gegebenen Seiten.

275 bis 278. Jede Figur wird erst in ein Rechteck verwandelt und daraus ein Quadrat hergestellt.

294 und 295. Man verbindet den Schnittpunkt mit Seitenmitten bzw. Seiten.

296. Grundseite in n Teile.

297. Wie 283.

298. Wie 284.

299 und 300. Zwei Seiten zu teilen in 2 und 3, 3 und 4, 4 und 5, 5 und 6, 6 und 7 Teile und Teilpunkte verbinden.

301 und 302. E in Figur 89 und 90 wird Mittelpunkt von BC .

303. Gegenseiten in 3, 2, 5 Teile teilen.

304. Mittellinie in 4, 6, 7 gleiche Teile und überragende Teile verschieben.

305 bis 308. Man verwandle die abzuziehende Fläche in ein Dreieck, welches im gegebenen Punkte eine Ecke und die anstossende Strecke und deren benachbarte als Seiten hat, und verschiebt das übers Vieleck hinausragende Teil, bis dessen Ecken auf dem Umring des Vielecks sind.

309 und 310. Man verbindet den Punkt mit den Teilpunkten der Mittelparallele.

311. Durch Umdrehung wird Deckung erzielt.

312. Die Linie muss beide Parallelen im Innern treffen.

327. $39 = \sqrt{36 + 3} = \sqrt{6^2 + (\sqrt{3})^2}$ oder:

$$39 = \sqrt{40 - 1} = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - 1^2} \text{ u. s. w.}$$

328. Siehe Antwort der Frage 88.

329. $x^2 + (a - x)^2 = F$ also:

$$x = \frac{1}{2} (a + \sqrt{2F - a^2}).$$

330. Zeichne in Figur 96I $PB = AC$ und mache $PD = PB$ und ziehe CP .

331. Division mit dem Quadrat einer bekannten Strecke s^2 gibt:

$$\left(\frac{x^2}{s}\right)^2 + \frac{ab}{s} \cdot \frac{x^2}{s} + \frac{cdef}{s^2} = 0,$$

$$\frac{x^2}{s} = -\frac{ab}{s} \pm \sqrt{\frac{a^2b^2 - cdef}{s^2}}$$

$$= -\frac{ab}{s} \pm \sqrt{\frac{a^2}{s} \cdot \frac{b^2}{s} - \frac{cd}{s} \cdot \frac{ef}{s}}.$$

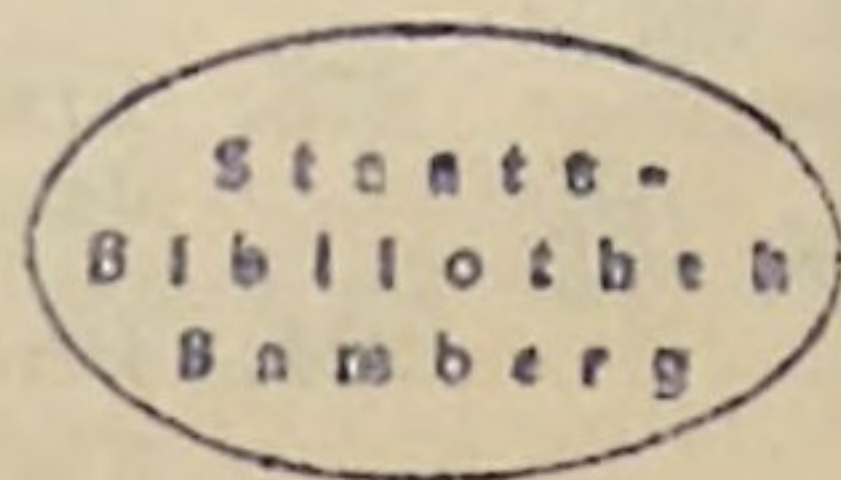
Druckfehler-Berichtigung.

Seite 49, Zeile 9 von oben statt $w = \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \dots\right)}$ lies $w = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \dots\right)}}$ (s. S. 126 unten).

Seite 51 in Erkl. 123, Zeile 2 von unten das letzte Klammerzeichen zu entfernen, also:

$$b = \frac{2}{3} \sqrt{2(m_c^2 + m_a^2) - m_b^2}$$

Seite 118, Figur 76 links Klammer für $p_2 = 76$ statt von A bis C' nur von A bis E_2 .



Von Kleyers Encyclopädie sind nachstehende Bände vollständig erschienen:

- Lehrbuch der Grundrechnungsarten.** Erstes Buch: Das Rechnen mit unbenannten ganzen Zahlen. Mit 71 Erklärungen und einer Sammlung von 657 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von A. Frömter. Preis: M. 3. —.
- do. do. Zweites Buch: Das Rechnen mit benannten Zahlen. Mit 30 Erklärungen und einer Sammlung von 518 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von Frömter und Neubüser. Preis M. 3. —.
- do. do. Drittes Buch: Das Rechnen mit unbenannten gebrochenen Zahlen. (Die gemeinen Brüche und die Dezimalbrüche.) Mit 260 Erklärungen und einer Sammlung von 309 gelösten und ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von J. G. Maier. Preis: M. 3. —.
- Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens.** Erster Teil. Die Schluss- und Kettenrechnung (die einfache und zusammengesetzte Regel detri und der Reesische Satz) nebst Anwendungen. Mit 100 Fragen, 325 Erklärungen, 63 Anmerkungen, 1250 Aufgaben, 18 Figuren, den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben und einer Münz-, Mass- und Gewichtstabelle. Zum Selbststudium, Nachschlagen, sowie zum Schulgebrauch bearbeitet nach **System Kleyer** von Dr. Richard Olbricht. Preis: M. 4 50.
- Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen** (Elemente der Buchstabenrechnung), der **Verhältnisse und Proportionen** mit einer Sammlung von 478 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von Hans Staudacher, Prof. an der kgl. Industrieschule zu Nürnberg. Erster Teil. Preis: M. 5. —.
- do. do. Zweiter Teil: Elemente der Zahlenlehre, Dezimal- und Kettenbrüche und Rechnung mit unvollständigen Zahlen. Mit einer Sammlung v. 277 gelöst. u. analogen ungelöst. Aufg., nebst d. Resultaten d. letzteren. Bearb. n. **System Kleyer** v. Prof. Hans Staudacher. Preis: M. 5. —.
- Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln** nebst einer Sammlung von 3296 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 6. —.
- Lehrbuch der Logarithmen** nebst einer Sammlung von 1996 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 4. —.
- Fünfstellige korrekte Logarithmentafeln** nebst einer trigonometrischen Tafel und einer Anzahl von anderen Tabellen. Von Ad. Kleyer. Preis: gebunden M. 2. 50.
- Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen**, der zusammengesetzten-, harmonischen-, Ketten- und Teilbruchreihen nebst einer Sammlung von über 400 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 4. —.
- Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung** nebst einer Sammlung von 525 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben aus allen Zweigen des Berufslebens. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 6. —.
- Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten.** Sammlung von 2381 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grösstenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 230 Erklärungen und 26 in den Text gedruckte Figuren. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 8. —.
- Lehrbuch der Gleichungen des 1ten Grades mit mehreren Unbekannten.** Sammlung von 905 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 403 Erklärungen und Anmerkungen. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von Otto Prange. Preis: M. 7. —.
- Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit einer Unbekannten** (Quadrat. Gleichungen). Sammlung von 1650 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form erläutert durch 872 Erklärungen und 53 Figuren. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von Dr. Aug. Blind. Preis: M. 10. —.
- Lehrbuch der Gleichungen 3. und 4. Grades**, nebst der trigonometrischen Auflösung der Gleichungen 2. Grades. Sammlung von 253 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 251 Erklärungen und 10 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von Prof. Conrad Metger. Preis M. 6. —.
- Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades.** (Diophantische Gleichungen.) Sammlung von 374 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben in vollständig gelöster Form und zahlreichen Erklärungen und Erläuterungen. Nebst den Abhandlungen des Bachez de Méziriac, im französischen Originale mit beigefügter deutscher Uebersetzung. Bearbeitet zum Teil nach **System Kleyer** von W. Fr. Schüler. Erstes Buch. Preis: M. 4. 50.
- Geschichte der Geometrie** für Freunde der Mathematik gemeinverständlich dargestellt von Richard Klimpert. Mit 100 in den Text gedruckten Figuren. Preis: M. 3. —.
- Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie** (Planimetrie). Erster Teil. Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene und die Kreislinie im allgemeinen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 234 Erklärungen und 109 in den Text gedruckten Figuren. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 1. 80.
- do. do. Zweiter Teil: Der Winkel und die parallelen Linien. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 201 Erklärungen und 113 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von Dr. J. Sachs. Preis M. 2. 20.
- do. do. Dritter Teil: Die geometrischen Gebilde und ihre Lagen-Veränderungen. Die einfachen Vielecke. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 737 Erklärungen und 343 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von Dr. J. Sachs. Preis: M. 6. —.
- do. do. Viierter Teil: Die Lehre vom Kreis. Die geometrischen Oerter und die merkwürdigen Punkte des Dreiecks. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 529 Erklärungen und 230 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von Prof. Dr. J. Sachs. Preis M. 6. —.
- do. do. Fünfter Teil: Die Flächen der geradlinigen Figuren. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 346 Erklärungen und 96 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von Prof. Dr. J. Sachs. Preis M. 4. —.

- Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben** gelöst durch geometrische Analysis. Erster Teil: Aufgaben, gelöst ohne Anwendung der Proportionenlehre. Mit 1952 gelösten und ungelösten Aufgaben, 178 Anmerkungen, 207 Erklärungen und 214 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von E. R. Müller. Preis: M. 5. —.
- do. do. Zweiter Teil: Aufgaben gelöst mit Anwendung der Proportionenlehre. Mit 1327 gelösten und ungelösten Aufgaben, 126 Anmerkungen, 100 Erklärungen und 174 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von E. R. Müller. Preis: M. 4. —.
- Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie).** Erster Teil: Die rechtwinklige Projektion auf eine und mehrere Projektionsebenen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 271 Erklärungen und 226 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von J. Vonderlinn, Privatdocent an der techn. Hochschule in München. Preis: M. 3. 50.
- do. do. Zweiter Teil: Über die rechtwinklige Projektion ebenflächiger Körper. Mit 130 Erklärungen und 99 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von J. Vonderlinn. Preis: M. 3. 50.
- do. do. Dritter Teil. Erste Hälfte: Schiefe Parallelprojektion, Centralprojektion einschliesslich der Elemente der projektiven Geometrie. Mit 195 Erklärungen und 169 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von J. Vonderlinn. Preis M. 3. 50.
- do. do. Dritter Teil. Zweite Hälfte: Centralcollineation ebener und räumlicher Systeme, Kegelschnitte, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie. Mit 218 Erklärungen und 210 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von J. Vonderlinn. Preis M. 5.
- Das apollonische Berührungsproblem und verwandte Aufgaben.** Sammlung von 163 gelösten und ungelösten Aufgaben und 200 Figuren. Zur Ergänzung des Schulunterrichts und zum Selbststudium. Nach System Kleyer durchaus neu bearb. zweite Auflage v. Prof. Heinr. Cranz. Preis M. 6.
- Lehrbuch der Analytischen Geometrie der Ebene.** Erster Teil: Analytische Geometrie des Punktes und der Geraden. Mit einer Sammlung von 100 Aufgaben, 206 gelösten Übungsaufgaben und 92 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Heinr. Cranz. Preis M. 6. —.
- Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie).** Erster Teil: Die Lage von geraden Linien und Ebenen im Raum. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 573 Erklärungen und 174 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. H. Seipp. Preis M. 6. —.
- Lehrbuch der Körperberechnungen.** Erstes Buch. Mit vielen gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 184 in den Text gedruckten Figuren. Zweite Auflage. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 4. —.
- Lehrbuch der Körperberechnungen.** Zweites Buch. Eine Sammlung von 772 vollständig gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 742 Erklärungen und 256 in den Text gedruckten Figuren. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 9. —.
- Lehrbuch der Goniometrie (Winkelmessungslehre)** mit 307 Erkl. u. 52 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 513 gelöst. u. ungelöst. analogen Aufgaben. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 7. —.
- Lehrbuch der ebenen Trigonometrie.** Eine Sammlung von 1049 gelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben und 178 ungelösten, oder mit Andeutungen versehenen trigonometrischen Aufgaben aus der angewandten Mathematik. Mit 797 Erkl., 563 in den Text gedruckten Fig. u. 65 Anmerk. nebst einem ausführlichen Formelnverzeichnis von über 500 Formeln. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 18. —.
- Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 236 Erklärungen und 56 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelnverzeichnis. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. W. Láska. Preis M. 4. 50.
- Lehrbuch der Determinanten und deren Anwendungen.** Erster Teil. Mit einer Sammlung von 460 gelösten und ungelösten Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren, nebst 226 Erklärungen. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. G. Weichold. Preis M. 10. —.
- Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen.** Mit 221 Erklärungen und 38 in den Text gedruckten Figuren. Mit einer Sammlung von 269 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach System Kleyer von Richard Krüger. Preis: M. 5. —.
- Lehrbuch der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.** Mit 52 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 29 Erkl. u. 17 in den Text gedruckten Figuren. Bearb. nach System Kleyer von Dr. K. J. Bobek. Preis: M. 5. —.
- Lehrbuch der Differentialrechnung.** Erster Teil: Die einfache und wiederholte Differentiation explizierter Funktionen von einer unabhängigen Variablen. Ohne Anwendung der Grenzen- und der Nullen-Theorie und ohne Vernachlässigung von Grössen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Zweite Auflage. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 5. —.
- Lehrbuch der Differentialrechnung.** Zweiter Teil: Die vollständige Differentiation entwickelter und nicht entwickelter Funktionen von einer und von mehreren reellen Veränderlichen. Reihenentwicklungen, unbestimmte Formen, Maxima und Minima. Nebst 352 gelösten Aufgaben, 78 Figuren und 230 Erklärungen. Bearbeitet nach dem System Kleyer von Prof. Dr. Haas. Preis: M. 8. —.
- Lehrbuch der Integralrechnung.** Erster Teil. Mit einer Sammlung von 592 gelösten Aufgaben. Für das Selbststudium, zum Gebrauch an Lehranstalten, sowie zum Nachschlagen von Integrationsformeln und -Regeln. Bearbeitet nach eigenem System und im Anschluss an das Lehrbuch der Differentialrechnung von Adolph Kleyer. Preis: Mark 10. —.
- Lehrbuch der Kombinatorik, oder die Lehre von den kombinatorischen Operationen.** (Permutation, Kombination, Variation.) Mit einer Sammlung von 506 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. H. Staudacher. Preis M. 6. —.

- Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Mit 303 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 68 Erklärungen und 27 in den Text gedruckten Figuren. Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. K. J. Bobek**. Preis: M. 6. —.
- Lehrbuch der sphärisch. und theoret. Astronomie und der mathematischen Geographie.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Mit 328 Erklärungen, Formelnverzeichnis, 148 in den Text gedruckten Figuren und 2 Tafeln. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. W. Láska**. Preis: Mark 6. —.
- Lehrbuch der allgemeinen Physik.** (Die Grundbegriffe und Grundsätze der Physik.) Mit 549 Erklärungen, 83 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelnverzeichnis, nebst einer Sammlung von 120 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Richard Klimpert**. Preis: M. 8. —.
- Lehrbuch der absoluten Masse und Dimensionen der physikalischen Grössen.** Mit 352 Fragen, 545 Erklärungen und einer Sammlung von 561 gelösten und ungelösten Aufgaben nebst den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Hovestadt**. Preis: M. 6. —.
- Lehrbuch der Statik fester Körper (Geostatik)** mit 291 Erklärungen und 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelnverzeichnis nebst einer Sammlung von 359 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Richard Klimpert**. Preis: M. 9. —.
- Lehrbuch der Dynamik fester Körper (Geodynamik)** mit 690 Erklärungen, 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelnverzeichnis nebst einer Sammlung von 500 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert**. Preis: M. 13. 50.
- Lehrbuch über die Percussion oder den Stoss fester Körper.** Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Richard Klimpert**. Separat-Abdruck aus **Klimpert, Lehrbuch der Dynamik**. Preis: M. 3. —.
- Lehrbuch der Elasticität und Festigkeit** mit 212 Erklärungen, 186 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelnverzeichnis, nebst einer Sammlung von 167 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Richard Klimpert**. Preis: M. 5. 50.
- Lehrbuch der Statik flüssiger Körper (Hydrostatik)** mit 425 Erklärungen, 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelnverzeichnis, nebst einer Sammlung von 208 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Richard Klimpert**. Preis: M. 8. —.
- Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik).** Erster Band: Die Bewegungserscheinungen flüssiger Körper, welche aus den Boden- und Seitenwänden von Gefässen, sowie durch Röhrenleitungen bei konstanter sowie veränderlicher Druckhöhe fließen. Mit 434 Erklärungen, mehr als 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelnverzeichnis, nebst einer Sammlung von 220 gelösten und ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der letzteren. Bearb. nach **System Kleyer** von **R. Klimpert**. Preis: M. 8. —.
- Lehrbuch über das spezifische Gewicht fester, flüssiger und gasförmiger Körper.** Mit 55 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der letzteren und 28 in den Text gedruckten Figuren. Preis: M. 2. —.
- Lehrbuch des Magnetismus und des Erdmagnetismus** nebst einer Samml. von gelösten u. ungelösten Aufg., erläutert durch 189 in den Text gedr. Fig. u. 10 Karten. Von **Ad. Kleyer**. Preis: M. 6. —.
- Lehrbuch der Reibungselektricität (Friktions-Elektricität, statischen oder ruhenden Elektricität)** erläutert durch 860 Erklärungen und 273 in den Text gedruckte Figuren, nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Von **Ad. Kleyer**. Preis: M. 7. —.
- Lehrbuch der Kontaktelektricität (Galvanismus)** nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben. Mit 731 Erklärungen, 238 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelnverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Oscar May**. Preis: M. 8. —.
- Lehrbuch der Elektrodynamik** (Erster Teil) mit 105 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Oscar May**. Preis: M. 3. —.
- Lehrbuch des Elektromagnetismus** mit 302 Erklärungen, 152 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelnverzeichnis, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Oscar May** und **Adolf Krebs**. Preis: M. 4. 50.
- Lehrbuch der Induktionselektricität und ihrer Anwendungen (Elemente der Elektrotechnik).** Mit 432 Erklärungen und 213 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Adolf Krebs**. Preis: M. 6. —.
- Lehrbuch der angewandten Potentialtheorie.** Mit 588 Erklärungen und 47 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung von erläuternden Beispielen und Uebungsaufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Hovestadt**. Preis: M. 7. —.
- Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie. Erster Band: Die Metalloide.** Mit 2208 Erklärungen, 332 Experimenten und 366 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Wilh. Steffen**. Preis: M. 16. —.
- Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie. Zweiter Band: Die Metalle.** Mit 573 Erklärungen, 174 Experimenten und 33 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **W. Steffen**. Preis: M. 16. —.

Vorlegeblätter

für den

Unterricht im Linear- und Projektionszeichnen.

Zum Gebrauche an Realschulen, höheren Bürgerschulen, gewerblichen Fortbildungsschulen, Gewerbe- und Handwerkerschulen u. s. w.

12 Tafeln mit erläuterndem Texte.

Entworfen und gezeichnet von

Jakob Vonderlinn,

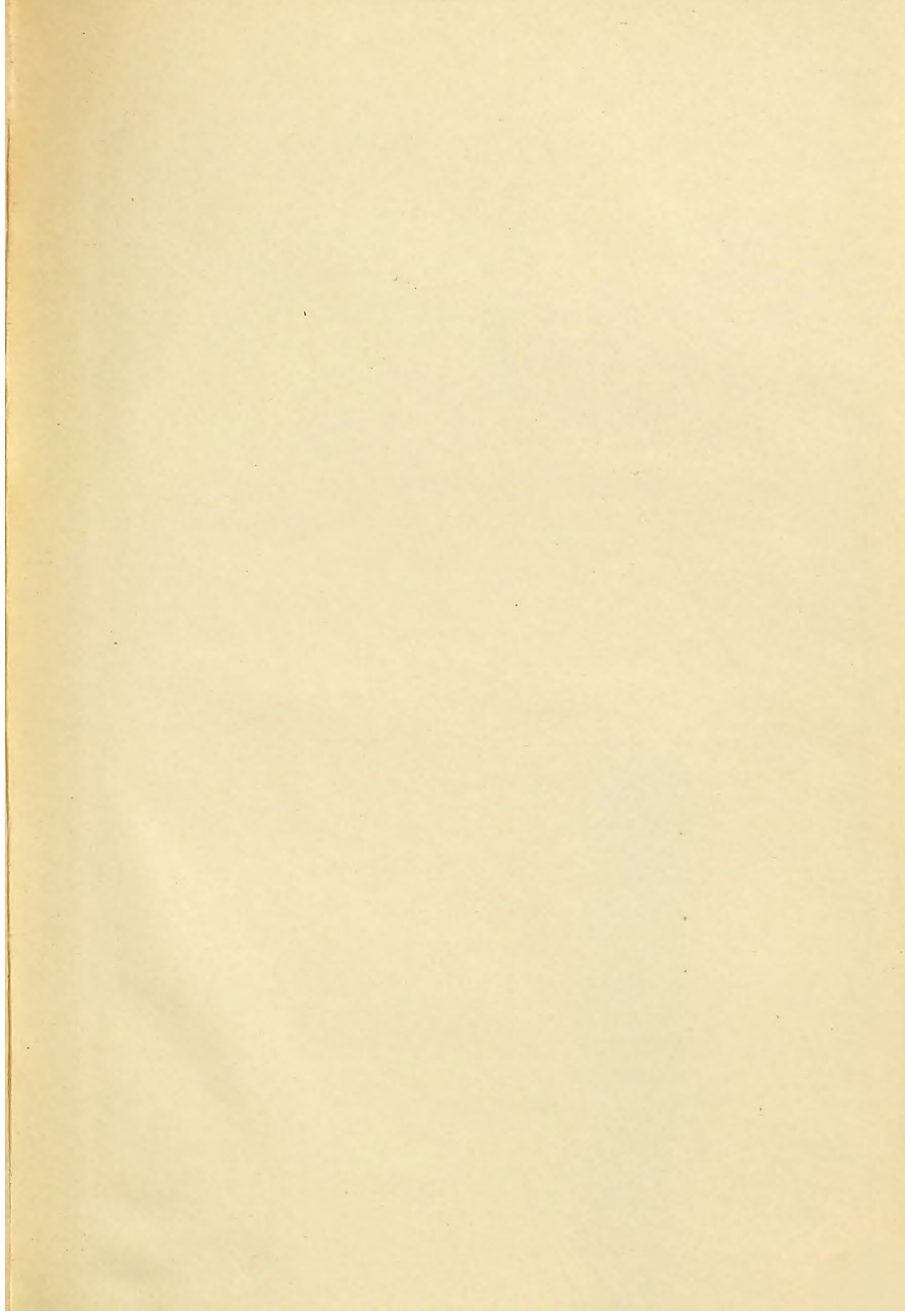
Ingenieur, Lehrer an der Kgl. Oberreal- und Baugewerkeschule sowie an der Sonntags- und Abendschule für Handwerker zu Breslau.

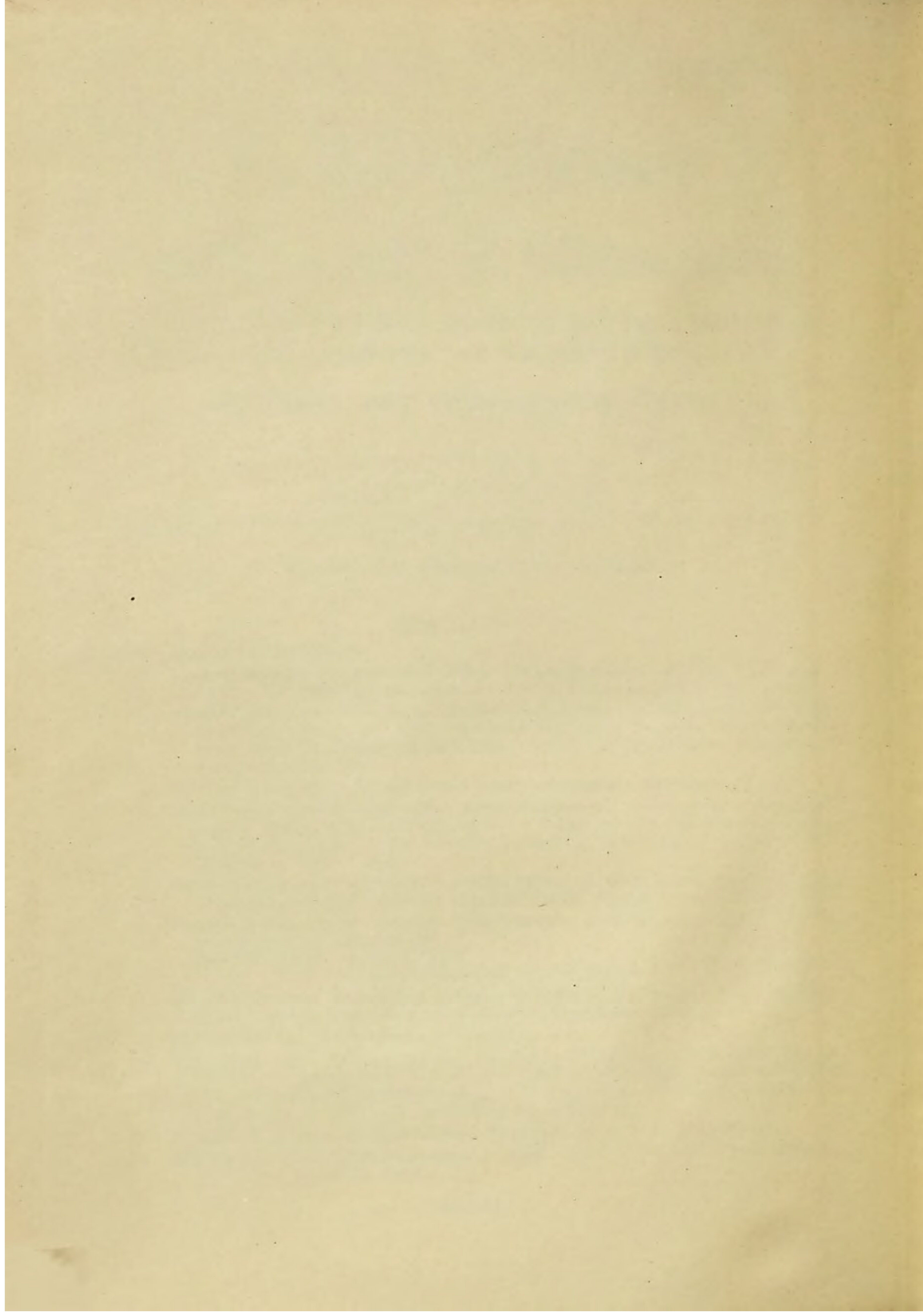
Preis: In Mappe Mk. 5. 50.

Inhalt.

Tafel 1. **Kurven-Konstruktionen.**

- „ 2. **Die gebräuchlichsten axonometrischen Projektionsarten.** Rechtwinklige Axonometrie. Schiefwinklige Axonometrie. Axonometrische Projektion eines Körpers.
- „ 3. **Durchdringung von zwei senkrechten Kreiscylindern.** Axonometrische Darstellung des Cylinderstückes B. Kreiscylindrische Stichkappe in einem Tonnengewölbe. Isometrische Darstellung der Stichkappe. Schräge kreiscylindrische Stichkappe in einem Tonnengewölbe.
- „ 4. **Durchdringung einer Pyramide mit einem senkrechten Kreiskegel.**
- „ 5. **Durchdringung eines senkrechten Kreiscylinders mit einem senkrechten Kreiskegel.** Kegelförmige Stichkappe in einem Tonnengewölbe. Isometrische Darstellung der Stichkappe. Axonometrische Darstellung, dimetrisch $1 : \frac{1}{2} : 1$ der Durchdringung in Figur 3 und 4.
- „ 6. **Durchdringung eines senkrechten Kreiscylinders mit einer Kugel. Durchdringung eines senkrechten Kreiskegels mit einer Kugel.** Fenster in einem Kugelgewölbe.
- „ 7. **Durchdringung zweier schiefen Kreiscylinder. Durchdringung eines schiefen Kreiskegels mit einer Kugel.**
Durchdringung a) einer Kugel
b) eines senkrechten Kreiscylinders } mit einem Wulste.
- „ 8. **Darstellung einer knieförmig gebogenen Röhre. Darstellung einer Röhrenfläche. Darstellung einer gewundenen cylindrischen Röhre.**
- „ 9. **Darstellung der verschiedenen Walmarten.**
- „ 10. **Darstellung eines Krümmelings für die innere Wange einer hölzernen Treppe.** Grund- und Aufriss einer Schraubenlinie nebst Abwicklung des Schraubencylinders, samt der Schraubenlinie in die Zeichnungsebene. Grund- und Aufriss des Krümmelings. Isometrische Darstellung des Krümmelings.
- „ 11. **Steinschnitt eines kreiscylindrischen Bogens in einer lotrechten Mauer.**
- „ 12. **Darstellung eines Schraubenbolzens.** Grund- und Aufriss des Schraubenbolzens. Dimetrische Projektion des Bolzens.







/ Kleyer, Adolph / Sachs, Joseph

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie) für den
Schulunterricht und das Selbststudium

Bd.: 5

1893

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.150-m(4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11841071-9